100 PROBLEMAS DE V. I. ARNOL´D

El estudiante que necesita mucho mas de cinco minutos para calcular el promedio de la centesima potencia del seno con error de 10% no domina las matemáticas aunque haya estudiado análisis no estándar, algebras universales, supervariedades o teoremas de encaje. (V. I. Arnol'd)

(1) Dibujar la grafica de la derivada y de la integral de una función dada a travéz de su grafica.

(2) Hallar el limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\tan x-\tan\sin x}{\arcsin\arctan x-\arctan\arcsin x}$$

(3) Hallar los valores críticos y los puntos críticos de la aplicación $z\to z^2+2\overline{z}$ (dibujar la respuesta).

(4) Calcular la centésima derivada de la función

$$\frac{x^2+1}{x^3-x}.$$

(5) Calcular la centésima derivada de la función

$$\frac{1}{x^2+3x+2}$$

en cero con error relativo de10%.

(6) Dibujar en el plano (x,y) la curva dada en forma parametrica:

$$x=2t-4t^3;\quad y=t^2-3t^4.$$

(7) ¿Cuantas normales a una elipse se pueden trazar de un punto dado del plano? Investigar la región donde el número de normales es maximal.

(8) ¿Cuantos máximos, mínimos y sillas tiene la función $x^4+y^4+z^4+u^4+v^4$en la superficie $x+...+v=0,\ x^2+...+v^2=1,\ x^3+...+v^3=C$?

(9) ¿Es verdad que cada polinomio positivo de dos variables reales alcanza su ínfimo en el plano?

(10) Investigar el comportamiento asintótico de las soluciones y de la ecuación $x^5+x^2y^2=y^6$que tiendan a 0 cuando $x\to 0$.

(11) Investigar la convergencia de la integral

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dxdy}{1+x^4y^4}.$$

(12) Hallar el flujo del campo vectorial $\overrightarrow{r}/r^3$ sobre la superficie

$$(x-1)^2+y^2+z^2=2.$$

(13) Calcular con error relativo de 5%

$$\int_1^{10} x^x dx$$

(14) Calcular con error relativo no mas de 10%

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x^4+4x+4)^{-100} dx.$$

(15) Calcular con error relativo de 10%

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(100(x^4-x))dx.$$

(16) ¿Cual parte del volúmen de un cubo de dimensión 5 constituye el volumen de la bola inscrita? ¿Y de un cubo de dimensión 10?

(17) Hallar la distancia entre el centro de masa de una semibola homogenea de dimensión 100 y el centro de la bola con error relativo de 10%.

(18) Calcular

$$\int \cdots \int e^{-\sum\limits_{1\le i\le j\le n} x_i x_j} dx_1 \ldots dx_n.$$

(19) Investigar las trayectorias de la luz en un medio plano con el coeficiente de refracción $n(y)=y^4-y^2+1$ usando la ley de Snellius $n(y)\sin\alpha = \text{const}$, donde α es el ángulo entre el rayo de luz y el eje y.

(20) Encontrar el valor de la derivada de la solución de la ecuación $\ddot{x}=x+A\dot{x}^2$ con las condiciones iniciales $x(0)=1$ y $\dot{x}(0)=0$, con respecto al parámetro A en $A=0$.

(21) Encontrar el valor de la derivada de la solución de la ecuación $\ddot{x}=\dot{x}^2+x^3$ con las condiciones iniciales $x(0)=0$ y $\dot{x}(0)=A$, con respecto al parámetro A en $A=0$.

(22) Investigar la frontera del dominio de estabilidad (max $\mathrm{Re}\lambda_j<0$) en el espacio de los coeficientes de la ecuación $\dddot{x}+a\ddot{x}+b\dot{x}+cx=0$.

(23) Resolver la ecuación cuasihomogenea
$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{x^3}{y}.$$

(24) Resolver la ecuación cuasihomogenea
$$\ddot{x} = x^5 + x^2\dot{x}^2.$$

(25) Es posible que un punto de equilibrio asintoticamente estable se vuelva inestable según Lyapunov después de la linealización?

(26) Investigar el comportamiento de la soluciones de los sistemas
$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 2\sin y - y - x, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 2x - x^3 - x^2 - \varepsilon y, \end{cases}$$
cuando $t \to +\infty$ y $\varepsilon << 1$.

(27) Graficar las imágenes de las soluciones de la ecuación
$$\ddot{x} = F(x) - k\dot{x}, \qquad F = -dU/dx,$$
en el plano (x,E), donde $E = \dot{x}^2/2 + U(x)$, alrededor de los puntos críticos no degenerados de la potencial U.

(28) Dibujar el retrato de fase e investigar su variación con la variación del parámetro complejo pequeño ε:
$$\dot{z} = \varepsilon z - (1+i)z|z|^2 + \bar{z}^4.$$

(29) Una carga eléctrica se mueve con velocidad 1 en un plano bajo la influencia de un campo magnético fuerte $B(x,y)$, perpendicular al plano. ¿Hacía donde se desplazará el centro del círculo de Larmor? Calcular la velocidad de este desplazamiento en la primera aproximación. [Matemáticamente, se trata de las curvas con curvatura NB, donde $N \to \infty$.]

(30) Encontar la suma de los índices de los puntos críticos distintos del cero del campo vectorial $z\bar{z}^2 + z^4 + 2\bar{z}^4$.

(31) Encontar el índice en 0 del campo vectorial con las componentes
$$(x^4 + y^4 + z^4,\, x^3y - xy^3,\, xyz^2).$$

(32) Encontar el índice en 0 del campo vectorial
$$\mathrm{grad}(xy + yz + xz).$$

(33) Encontar el coeficiente de enlazamiento de las líneas de fase para la ecuación de oscilaciones pequeñas $\ddot{x} = -4x, \ddot{y} = -9y$ en la superficie de nivel de la energía total.

(34) Investigar los puntos críticos de la curva $y = x^3$ en el plano proyectivo.

(35) Dibujar las geodésicas en la superficie

$$(x^2+y^2-2)^2+z^2=1.$$

(36) Dibujar las evolventes de la parábola cúbica $y=x^3$. (La evolvente es el lugar geomeétrico de los puntos $\overrightarrow{r}(s)+(c-s)\dot{\overrightarrow{r}}(s)$, donde s el la longitud a lo largo de la curva $\overrightarrow{r}(s)$ y c es una constante.)

(37) Demostrar que las superficies en el espacio euclidiano

$$((A-\lambda E)^{-1}x,x)=1,$$

donde A es un operador simétrico, son ortogonales para los valores distintos de λ.

(38) Calcular el integral de la curvatura Gaussiana de la superficie

$$z^4+(x^2+y^2-1)(2x^2+3y^2-1)=0.$$

(39) Calcular el integral de Gauss

$$\iint \frac{(d\overrightarrow{A}, d\overrightarrow{B}, \overrightarrow{A}-\overrightarrow{B})}{|\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}|^3},$$

donde $\overrightarrow{A}$ varía sobre la curva $x=\cos\alpha, y=\sin\alpha, z=0$ y $\overrightarrow{B}$ sobre la curva $x=2\cos^2\beta, y=\frac{1}{2}\sin\beta, z=\sin 2\beta$.

(40) Trasladar paralelamente hacía el oriente un vector que apunta al norte en Leningrado (latitud 60°) a lo largo de un paralelo cerrado.

(41) Encontrar la curvatura geodésica de la recta $y=1$ en el semiplano superior con la métrica de Poincaré–Lobachevski

$$ds^2=(dx^2+dy^2)/y^2.$$

(42) ¿Se intersectan en un punto las medianas de un triángulo en el plano de Lobachevski (el plano hiperbólico)? ¿Y las alturas?

(43) Encontrar los números de Betti de la superficie $x_1^2+\ldots+x_k^2-y_1^2-\ldots-y_l^2=1$ y del conjunto $x_1^2+\ldots+x_k^2\leq 1+y_1^2+\ldots+y_l^2$ en un espacio vectorial de dimensión $k+l$.

(44) Encontrar los números de Betti de la superficie $x^2+y^2=1+z^2$ en el espacio proyectivo tridimensional. Lo mismo para las superficies $z=xy$, $z=x^2$, $z^2=x^2+y^2$.

(45) Encontrar el índice de autointersección de la superficie $x^4+y^4=1$ en el plano proyectivo $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$.

(46) Encontrar una función conforme del interior de un círculo unitario al primer cuadrante del plano.

(47) Encontrar una función conforme del exterior de un círculo unitario al exterior de una elipse dada.

(48) Encontrar una función conforme de un semiplano sin un intervalo perpendicular a su frontera a un semiplano.

(49) Calcular
$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{\sqrt{1+z^{10}}}.$$

(50) Calcular
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2}dx.$$

(51) Calcular la integral
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\frac{1-e^x}{1+e^x}dx.$$

(52) Calcular el primer término de la asintótica cuando $k \to \infty$ para la integral
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{1+x^{2n}}}dx.$$

(53) Investigar los puntos críticos de la forma diferencial $dt = dx/y$ en la superficie de Riemann compacta $y^2/2+U(x) = E$, donde U es un polinómio y E es un valor regular.

(54) $\ddot{x} = 3x-x^3-1$. ¿En cual de los pozos de potencial (el más profundo o el menos profundo) el periodo de oscilaciones es mayor dado el valor de la energía total?

(55) Investigar topologicamente la superficie de Riemann de la función
$$w = \arctan z.$$

(56) ¿Cuantas asas tiene la superficie de Riemann de la función
$$w = \sqrt{1+z^n}?$$

(57) Encontrar la dimensión del espacio de soluciones del problema
$$\partial u/\partial \overline{z} = \delta(z-i)$$
cuando $\operatorname{Im} z \geq 0$, $\operatorname{Im} u(z) = 0$ cuando $\operatorname{Im} z = 0$, $u(z) \to 0$ cuando $z \to \infty$.

(58) Encontrar la dimensión del espacio de soluciones del problema
$$\partial u/\partial \overline{z} = a\delta(z-i)+b\delta(z+i)$$
cuando $|z| \leq 2$, $\operatorname{Im} u = 0$ cuando $|z| = 2$.

(59) Investigar la existencia y unicidad de la solución del problema
$$yu_x = xy_u, \qquad u|_{x=1} = \cos y$$
en una vecindad del punto $(1, y_0)$.

(60) Investigar la existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy

$$x(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial x}+y^3\frac{\partial u}{\partial y}=0, \qquad u|_{y=0}=1$$

en una vecindad del punto $(x_0,0)$.

(61) ¿Cual es el máximo t tal que la solución del problema

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\sin x, \qquad u|_{t=0}=0$$

se extiende al intervalo $[0,t)$?

(62) Encontrar todas las soluciones de la ecuación $y\,\partial u/\partial x-\sin x\,\partial u/\partial y=u^2$ en una vecindad del punto $(0,0)$.

(63) Investigar la existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy

$$y\,\partial u/\partial x+\sin x\,\partial u/\partial y=y, \qquad u|_{x=0}=y^4$$

en el plano (x,y).

(64) ¿Tendrá el problema de Cauchy $u|_{y=x^2}=1$, $(\nabla u)^2=1$ una solución continuamente diferenciable en el dominio $y\geq x^2$? ¿Y en el dominio $y\leq x^2$?

(65) Encontrar el valor promedio de la función $\ln r$ en el círculo $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Lo mismo para la función $1/r$ en una esfera.

(66) Resolver el problema de Dirichlet

$$\begin{array}{lll} \Delta u=0 & \text{cuando} & x^2+y^2<1; \\ u=1 & \text{cuando} & x^2+y^2=1,\ y>0; \\ u=-1 & \text{cuando} & x^2+y^2=1,\ y<0. \end{array}$$

(67) ¿Cual es la dimensión del espacio de soluciones, continuas en $x^2+y^2\geq 1$, del problema

$$\Delta u=0 \text{ cuando } x^2+y^2>1, \qquad \partial u/\partial n=0 \text{ cuando } x^2+y^2=1?$$

(68) Encontrar

$$\inf\iint_{x^2+y^2\leq 1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\,dxdy$$

sobre todas las funciones C^∞ que toman el valor 0 en 0 y 1 en $x^2+y^2=1$.

(69) Demostrar que el ángulo sólido bajo el cual se ve una curva cerrada es una función armónica del vértice del ángulo.

(70) Calcular el valor promedio del ángulo sólido bajo el cual se ve el círculo

$$x^2+y^2=1, \qquad z=0$$

desde los puntos de la esfera $x^2+y^2+(z-2)^2=1$.

(71) Calcular la densidad de la carga eléctrica en una esfera hueca conductora $x^2+y^2+z^2=1$ en el interior de la cual se encuentra una carga q a la distancia r del centro.

(72) Calcular, en la primera aproximación con respecto a ε, la influencia de la compresión de la Tierra ($\varepsilon \sim 1/300$) sobre su campo gravitacional a distancia de la Luna (asumiendo la homogeneidad de la Tierra).

(73) Calcular (en la primera aproximación con respecto a ε) la influencia de la imperfección de un condensador casi esférico $R = 1 + \varepsilon f(\phi, \theta)$ sobre su capacidad.

(74) Dibujar la gráfica de $u(x,1)$ para $0 \leq x \leq 1$, de la función

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u|_{t=0} = x^2, \qquad u|_{x^2=x} = x^2,$$

(75) Como consecuencia de las oscilaciones anuales de temperatura la tierra en la ciudad N se congela hasta la profundidad de 2 metros. ¿Hasta que profundidad se congelaría ta tierra como consecuencia de unas oscilaciones diarias de temperatura de la misma amplitud?

(76) Investigar el comportamiento de la soluciones, cuando $t \to +\infty$, del problema

$$u_t + (u \sin x)_x = \varepsilon u_{xx}, \qquad u|_{t=0} \equiv 1, \qquad \varepsilon << 1.$$

(77) Encontrar los valores propios y sus multiplicidades para el operador de Laplace $\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}$ sobre una esfera de radio R en el espacio euclidiano de dimensión n.

(78) Resolver el problema de Cauchy

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - 2B, \qquad \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 6\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - 2A,$$
$$A|_{t=0} = \cos x, \qquad B|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial B}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

(79) ¿Cuantas soluciones tiene el problema de valor de frontera

$$u_{xx} + \lambda u = \sin x, \qquad u(0) = u(\pi) = 0?$$

(80) Resolver la ecuación

$$\int_0^1 (x+y)^2 u(x)dx = \lambda u(y) + 1.$$

(81) Encontrar la función de Green del operador $d^2/dx^2 - 1$ y resolver la ecuación

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} u(y)dy = e^{-x^2}.$$

(82) ¿Para que valores de la velocidad c la ecuación $u_t = u - u^2 + u_{xx}$ tiene solución de la forma $u = \phi(x - ct)$, $\phi(-\infty) = 1$, $\phi(\infty) = 0$, $0 \leq u \leq 1$?

(83) Encontrar las soluciones de la ecuación $u_t = u_{xxx} + uu_x$ de la forma $u = \phi(x - ct)$, $\phi(\pm\infty) = 0$.

(84) Encontrar el número de cuadrados positivos y negativos en la forma normal de la forma cuadrática $\sum_{i<j}(x_i - x_j)^2$ de n variables. Lo mismo para la forma $\sum_{i<j} x_i x_j$.

(85) Encontrar las longitudes de los ejes principales del elipsoide

$$\sum_{i \leq j} x_i x_j = 1.$$

(86) Encontrar la recta que pasa por el centro de un cubo (tetraedro, isocaedro) tal que la suma de los cuadrados de las distancias de ella a los vértices es (a) minimal (b) maximal.

(87) Encontrar las derivadas de las longitudes de los semiejes del elipsoide $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 1 + \varepsilon xy$ con respecto a ε en $\varepsilon = 0$.

(88) ¿Cuales figuras pueden ser intersecciones de un cubo de dimensión infinita $|x_k| \leq 1$, $k = 1, 2, \ldots$ con un plano de dimensión dos?

(89) Calcular la suma de los productos vectoriales $[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y]$.

(90) Calcular la suma de los conmutadores de matrices $[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]]$ donde $[A,B] = AB - BA$.

(91) Encontrar la forma normal de Jordan del operador $e^{d/dt}$ en el espacio de cuasipolinomios $\{e^{\lambda t} p(t)\}$ donde los grados de los polinomios $p(t)$ son menores de 5, y del operador $\mathrm{ad}_A : B \to [A,B]$ en el espacio de matrices $(n \times n)$ B donde A es una matriz diagonal.

(92) Encontrar los índices de todos los subgrupos del grupo de rotaciones de un cubo, y todos los subgrupos normales.

(93) Descomponer el espacio de todas las funciones definidas en los vértices de un cubo en subespacios invariantes, irreducibles con respecto a (a) el grupo de simetrías del cubo; (b) el grupo de sus rotaciones.

(94) Descomponer el espacio vectorial real de dimensión 5 en subespacios irreducibles invariantes bajo la permutación cíclica de los vectores base.

(95) Descomponer el espacio de los polinomios homogéneos de grado 5 en (x,y,z) en subespacios irreducibles invariantes bajo el grupo $SO(3)$.

(96) Cada uno de los 3600 usuarios de un conmutador telefónico hace una llamada en el promedio una vez por hora. ¿Cual es la probabilidad que en un segundo dado llegan 5 o más llamadas? Estimar el intervalo promedio entre tales segundos i e $i+1$.

(97) Una partícula en un paseo aleatorio por los puntos enteros del semieje $x \geq 0$ se desplaza hacía la izquierda por una unidad con la probabilidad a, hacía la derecha por una unidad con la probabilidad b y en el resto de los casos se queda en el mismo punto (si $x = 0$ en vez de desplazarse hacía la izquierda la partícula se queda en el mismo lugar). Determinar la distribución de la probabilidad despes de un tiempo largo, el valor esperado de x y el valor esperado de x^2 si la partícula comenzó en el punto $x = 0$.

(98) Los participantes de un juego forman un círculo y al mismo tiempo sacan un número de 0 a 5 con los dedos de la mano derecha. El ganador se determina contando la suma de todos lo números a lo largo del círculo, comenzando con un jugador escogido previamente. ¿Para que número de participantes N existe un grupo de $N/10$ miembros tal la probabilidad de que el ganador pertenezca a este grupo es mayor que 0.9? ¿Como se comporta la probabilidad de ganar para el jugador con el cual comienza la cuenta cuando $N \to \infty$?

(99) Uno de los dos jugadores esconde una moneda de 10 o 20 centavos y el otro adivina la denominación de la moneda. Si la adivina, recibe la moneda, en el caso contrario paga 15 centavos. ¿Es equitativo este juego? ¿Cuales son las estrategias mixtas optimales para cada jugador?

(100) Encontrar el valor esperado del area de la proyección de un cubo con arista 1 a un plano si la distribución de las direcciones de la proyección es isotrópica.