

Teoría de Juegos en la Fórmula 1

Luis Contreras Moreno
lcontrerasm@math.cinvestav.mx
Departamento de Matemáticas
CINVESTAV - IPN
Ciudad de México, México

Resumen

Este artículo presenta un análisis de teoría de juegos aplicado al contexto de las carreras de Fórmula 1, utilizando un modelo de juego de suma cero. El objetivo principal de este estudio es construir un modelo de juego que capture la interacción estratégica entre dos pilotos en un entorno de competición automovilística. En el artículo se demuestra la existencia y caracterización de equilibrios de Nash en el juego construido, la caracterización de estos equilibrios proporciona información valiosa sobre las estrategias óptimas que los pilotos pueden adoptar durante una carrera de Fórmula 1. Además, para analizar el juego de manera más profunda, se introducen unas nuevas funciones llamadas funciones contadoras; estas funciones desempeñan un papel fundamental en la determinación de las ganancias para cada piloto en función de las estrategias elegidas. Al incorporar estas funciones, el modelo de juego captura diversos factores, como tácticas de conducción, características del circuito y habilidades del piloto, lo que mejora en cierta forma la precisión del análisis. Adicionalmente, se realizan simulaciones a pequeña escala utilizando el modelo de juego propuesto. Estas simulaciones ofrecen ilustraciones prácticas de cómo diferentes estrategias y acciones afectan el resultado de la carrera. Los resultados obtenidos en las simulaciones contribuyen a una mejor comprensión de la dinámica y toma de decisiones estratégicas en las carreras de Fórmula 1.

Palabras clave: Fórmula 1, teoría de juegos, juego de suma cero, equilibrio de Nash, funciones contadoras.

1. Introducción

La Fórmula 1 es una de las competiciones automovilísticas más prestigiosas y emocionantes del mundo pues reúne a los mejores pilotos, equipos y fabricantes de automóviles. Desde su creación en 1950, se ha distinguido por su mezcla única de velocidad, tecnología y rivalidad deportiva, donde cada carrera es un desafío táctico en el que se toman decisiones cruciales, como la selección de neumáticos, la estrategia de paradas en boxes y los adelantamientos estratégicos, con el objetivo de obtener

la ventaja necesaria para cruzar primero la línea de meta.

Dentro del contexto anterior la teoría de juegos resulta ser una herramienta útil para el análisis de las interacciones estratégicas entre los actores involucrados en este deporte, ya que al considerar a los equipos y pilotos como jugadores racionales que buscan maximizar sus propios resultados, podemos explorar cómo las decisiones estratégicas individuales se entrelazan y afectan el resultado general de las carreras y los campeonatos. En este artículo el estudio de las situaciones ya mencionadas, lo haremos mediante el uso de modelos de juegos, como los juegos de suma cero y los equilibrios de Nash, los cuales nos permitirán distinguir las estrategias óptimas para los competidores tomando en cuenta factores como la configuración del circuito, comportamiento del piloto en pista y desempeño del auto.

Al ser este un trabajo introductorio comenzaremos presentando al lector tanto los conceptos fundamentales de la teoría de juegos como los de la Fórmula 1, esto para una mayor comprensión de lo que pretendemos exponer, es importante mencionar que solo haremos referencia a los conceptos que serán de nuestra utilidad en este trabajo, aunque si el lector desea puede consultar, por ejemplo [1], [2] y [3] para un mayor panorama de los temas aquí expuestos.

2. Preliminares

2.1. Fórmula 1

Como se ha hecho mención en párrafos anteriores la Fórmula 1 (F1) es un deporte de alta exigencia, en el cuál influyen demasiados factores, los cuales en conjunto permiten la creación de estrategias para poder tener un rendimiento satisfactorio a lo largo de cada gran premio.

El campeonato mundial de F1, consta actualmente de 23 grandes premios, donde cada uno de estos tiene la siguiente estructura:

- Prácticas libres: Constan de tres sesiones (P1, P2 y P3) en las cuales, los equipos y pilotos tienen sesiones para familiarizarse con el circuito, probar configuraciones y ajustar sus autos antes de la carrera, estas prácticas resultan ser de gran utilidad para la creación de estrategias, pues en ellas se recabarán los datos adecuados para su formulación.
- Clasificación: Está dividida en tres partes (Q1, Q2 y Q3), las cuales son rondas de eliminación donde cada piloto trata de registrar los mejores tiempos a su alcance, estas sesiones determinan el lugar de salida en la carrera principal.
- Carrera sprint: No se realiza en todos los grandes premios, consta de una mini sesión de aproximadamente 20 – 30 vueltas, cuando se lleva a cabo sirve para determinar posición de salida y una repartición de puntos
- Carrera principal: Los pilotos compiten en una carrera que generalmente tiene una distancia establecida o una duración determinada, es durante esta etapa donde se reparte el total de puntos de cada gran premio cuando no hay carrera sprint.

Uno de los factores primordiales a tomar en cuenta es el rendimiento de los neumáticos, dentro de la F1 los pilotos tienen a su disposición los siguientes tipos:

- Slicks: Los neumáticos slicks son lisos y sin dibujo en la banda de rodadura. Están diseñados para proporcionar la máxima superficie de contacto con la pista, lo que permite un agarre óptimo y una mejor tracción en condiciones de pista seca.
- Intermedios: Los neumáticos intermedios cuentan con un patrón de dibujo en la banda de rodadura que ayuda a evacuar el agua en condiciones de lluvia ligera o pistas mojadas. Proporcionan un mejor agarre que los slicks en estas condiciones, pero no tanto como los neumáticos de lluvia extrema.
- Lluvia extrema: Los neumáticos de lluvia extrema tienen un dibujo profundo y agresivo en la banda de rodadura para evacuar grandes cantidades de agua en pistas muy mojadas o con lluvia intensa. Estos neumáticos proporcionan el máximo agarre y control en condiciones de lluvia extrema.

Nosotros solo consideraremos a los neumáticos slicks, este tipo de neumáticos se clasifican en función de su dureza y rendimiento, y se identifican mediante colores específicos, dentro de los tipos de neumáticos slicks podemos encontrar:

- Neumáticos suaves (S): Son los neumáticos más blandos y ofrecen un mayor rendimiento en cuanto a velocidad. Son adecuados para circuitos de baja abrasión y temperaturas más bajas; tienen un rápido calentamiento y desgaste, pero brindan un excelente rendimiento en distancias cortas.
- Neumáticos medios (M): Son una opción intermedia entre los neumáticos blandos y duros. Ofrecen un equilibrio entre agarre y durabilidad, y son adecuados para una amplia variedad de condiciones de pista y temperaturas.
- Neumáticos duros (D): Son los neumáticos más duros y duraderos, ofrecen un menor agarre en comparación con los neumáticos más suaves, pero son más resistentes al desgaste; son adecuados para circuitos de alta abrasión y temperaturas más altas.

El modelamiento del desgaste de los neumáticos es una labor ardua y complicada, pues intervienen diversos factores físicos tanto de la configuración del circuito, como del desempeño del piloto y del auto, si lo desea el lector puede consultar [6] para un enfoque más especializado de estas cuestiones.

Finalmente será de nuestra utilidad conocer los movimientos que pueden hacer en pista los pilotos, ya que para construir las estrategias estos serán importantes, pues nos podrían brindar opciones para hipotéticos cambios de posiciones, los principales movimientos son:

- Overtake: Sucede cuando un piloto logra superar y pasar al piloto que está delante de él en la pista.
- Undercut: El undercut es una estrategia en la que un piloto ingresa a boxes antes que su oponente para cambiar neumáticos y realizar una parada en boxes

más rápida. El objetivo es aprovechar el tiempo extra que el piloto pasa en boxes para salir de los boxes con neumáticos frescos y una ventaja en pista sobre el oponente, lo que le permite adelantarlo después de la parada en boxes.

- Overcut: El overcut es una estrategia contraria al undercut. En lugar de ingresar a boxes antes, el piloto se queda en pista durante un período de tiempo más largo antes de realizar la parada en boxes. El objetivo es aprovechar los neumáticos desgastados del oponente y un posible tráfico en pista para ganar tiempo y salir de los boxes por delante del oponente después de la parada en boxes.

De una manera muy general podemos decir que los factores ya mencionados, constituyen la base para la creación de las estrategias que aquí trabajaremos, aunque es importante mencionar que en la práctica profesional intervienen aún más y diversos factores los cuales pueden ser mecánicos, personales, etc.,

2.2. Teoría de Juegos

La teoría de juegos formalizada en la década de 1940, por John von Neumann y Oskar Morgenstern, es el análisis de modelos matemáticos de situaciones de cooperación o de conflicto entre decisores o tomadores de decisiones llamados *jugadores o agentes*, los cuales pueden ser individuos, empresas, grupos políticos, etc.

En este contexto a las situaciones de interacción entre dos o más jugadores que tienen objetivos individuales y toman decisiones estratégicas les llamaremos *juegos*, y estos estarán compuestos por:

- Jugadores: Son los participantes en el juego, quienes toman decisiones racionales y buscan maximizar sus propios resultados.
- Estrategias: Son las diferentes opciones o acciones disponibles para cada jugador en el juego, los jugadores las pueden elegir de forma pura (determinista) o mixta (aleatoria).
- Pagos o utilidades: Representan los resultados o beneficios asociados a cada combinación de estrategias seleccionadas por los jugadores.
- Reglas: Establecen las restricciones y condiciones del juego.

Formalmente tenemos la siguiente:

Definición 1 *Un juego estratégico (o en forma normal) es una terna*

$$G = (I, \{A_i, i \in I\}, \{v_i, i \in I\})$$

donde $I = \{1, 2, \dots, n\}$ es el conjunto de jugadores y para cada $i \in I$:

- A_i es el conjunto de acciones (o estrategias puras) del jugador i .

- $v_i : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow \mathbb{R}$ es la función de pago del jugador i .

En este artículo solo nos centraremos en el caso cuando los A_i son todos finitos, a estos tipos de juegos se les conoce como *juegos finitos*; también de acuerdo a la interacción entre los jugadores podemos distinguir entre *juegos cooperativos* y *juegos no cooperativos*, donde los primeros serán aquellos juegos donde todos los jugadores desean cooperar entre sí para alcanzar un objetivo que, en algún sentido, sea benéfico para todos ellos, mientras que en los segundos los jugadores actúan de forma independiente y solo les interesan sus objetivos individuales.

Podemos notar también de la definición que la función objetivo v_i de cada jugador i depende en principio de las acciones de todos los jugadores (aunque puede ocurrir lo contrario), por tal motivo no tiene sentido hablar de óptimos (máximos o mínimos); en esta teoría nosotros estaremos interesados de hablar de *equilibrios*, los cuales se referirán a situaciones en la cual ningún jugador tiene incentivos para cambiar su estrategia dada la elección de los demás jugadores. Estos equilibrios representaran una estabilidad en la toma de decisiones estratégicas y son de hecho un concepto fundamental en el análisis de juegos.

Nosotros estaremos interesados principalmente en los *equilibrios de Nash (EN)*, aunque existen otros tipos de equilibrios como los de *Pareto* (ver [3]).

Definición 2 Sea $G = (I, \{A_i, i \in I\}, \{v_i, i \in I\})$ un juego en forma normal, decimos que $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*) \in A_1 \times \dots \times A_n$ es un equilibrio de Nash (EN) para G si, para cada jugador i , a_i^* es la mejor respuesta del jugador i (o al menos una de ellas) a las estrategias de los otros $n - 1$ jugadores $(a_1^*, \dots, a_{i-1}^*, a_{i+1}^*, \dots, a_n^*)$, i.e.,

$$v_i((a_1^*, \dots, a_{i-1}^*, a_i^*, a_{i+1}^*, \dots, a_n^*)) \geq v_i((a_1^*, \dots, a_{i-1}^*, a_i, a_{i+1}^*, \dots, a_n^*)), \forall a_i \in A_i$$

Dicho de otro modo, a_i^* es solución a la ecuación

$$\max_{a_i \in A_i} v_i((a_1^*, \dots, a_{i-1}^*, a_i, a_{i+1}^*, \dots, a_n^*))$$

Dado un juego G la existencia de EN depende de algunas condiciones las cuales no discutimos aquí, pero al lector interesado en abordar estas cuestiones se le sugiere, por ejemplo, ver [1] y [3].

Dentro de nuestro análisis estaremos interesados en la siguiente clase de juegos.

Definición 3 Sea $G = (\{1, 2\}, \{A, B\}, \{v_1, v_2\})$ un juego en forma normal, decimos que G es un juego de suma cero si:

$$v_1((a, b)) + v_2((a, b)) = 0, \forall (a, b) \in A \times B$$

Estos juegos son comúnmente utilizados para analizar situaciones competitivas donde los jugadores compiten por una cantidad fija de recursos o un objetivo en común, y cualquier ganancia o pérdida es distribuida entre ellos de manera inversa.

Definición 4 Sea $G = (\{1, 2\}, \{A, B\}, \{v_1, v_2\})$ un juego de suma cero, con $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ Definimos la matriz de pago de G como

$$V = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

Donde $a_{i,j} = v_1(a_i, b_j) = -v_2(a_i, b_j)$

Podemos notar que para juegos de suma cero, toda la información del juego está contenida en la matriz de pagos.

El siguiente resultado nos será de mucha utilidad para poder calcular EN en juegos de suma cero.

Proposición 1 Sea $G = (\{1, 2\}, \{A, B\}, \{v_1, v_2\})$ un juego de suma cero, y sea $v(a, b) = v_1(a, b) = -v_2(a, b)$. Entonces (a^*, b^*) es un equilibrio de Nash ssi (a^*, b^*) es un punto silla, i.e,

$$v(a, b^*) \leq v(a^*, b^*) \leq v(a^*, b), \quad \forall (a, b) \in A \times B$$

La demostración del resultado anterior se puede consultar en [7] o [8].

3. Construcción del juego

3.1. Consideraciones

Para la construcción tendremos en cuenta los siguientes factores:

- Configuración de la pista: Nosotros estaremos interesados en trabajar en circuitos donde sea muy difícil realizar overtakes en condiciones normales, ya que esto reduce a pensar la estrategia solo en base a las paradas en pits, undercuts, overcuts y conservación de los neumáticos; podrán darse overtakes, pero estos ocurrirán cuando un piloto decide simplemente ceder, al contar con menos ritmo de carrera. Para poder seleccionar a los circuitos compatibles con este modelo, tenemos el siguiente:

Pista	P.O
Hockenheimring	49.5
Interlagos	48.2
Portimao	46.5
Sakhir	44.5
Miami	44.0
Sakhir - 2	44.0
Austin	39.8
Losail	39.0
Spa	38.4
Yas Marina - 2021	38.0
Baku	37.6
Shangai	37.0
Monza	35.0
Paul Ricard	34.8
Suzuka	31.8

Red Bull Ring	31.0
Melbourne	31.0
Istanbul Park	29.5
Jeddah	28.5
Sepang	27.0
Sochi	27.0
Silverstone	26.7
Catalunya	26.5
Nurburgring	25.0
Hungaroring	25.0
Montreal	25.0
Zandvoort	23.0
Yas Marina	22.3
México	22.0
Imola	19.7
Marina Bay	19.5
Mugello	18.0
Melbourne	5.0
Monaco	4.0

Cuadro 1: Promedio de overtakes por circuito en la F1, de la temporada 2017 a la temporada 2022 (en verde los circuitos corridos en 2022).

Podemos notar del gráfico anterior, que al tomar como límite los 25 overtakes en promedio, consideraremos como compatibles los siguientes circuitos:

Mónaco	Melbourne
Mugello	Marina Bay
México	Imola
Yas Marina	Zandvoort
Montreal	Hungaroring
Nurburgring	

Cuadro 2: Circuitos compatibles con el modelo.

- Tiempo y neumático privilegiado: En cada uno de los circuitos anteriores, tomaremos como tiempo privilegiado, al que le toma al mejor coche en pista dar una vuelta completa al circuito con neumáticos suaves, así podremos medir pérdidas de tiempo en comparación a este, de igual forma nuestra referencia para los neumáticos serán los suaves (al ser los más rápidos) y de entrada en tiempos, los otros tipos de gomas presentarán una desventaja inicial.
- Degradación de los neumáticos: Supondremos que los neumáticos se degradan de forma "uniforme" y "gradual" con respecto a la cantidad de vueltas dadas,

el desgaste lo mediremos en base al tiempo que se pierde en dar una vuelta, con respecto al tiempo privilegiado.

- **Clima y paradas en pits:** Se supondrá a lo largo de toda la carrera que el clima es apto para el uso exclusivo de los neumáticos suaves, medios y duros, de esta forma evitamos el uso de neumáticos de lluvia. De igual forma supondremos que la duración en tiempo de las paradas en pits para cada equipo son iguales y de primera instancia cada piloto solo realizará una única para en pits.
- **Coche de seguridad:** De momento en esta primera construcción no tomaremos en cuenta la aparición de algún coche de seguridad durante la carrera, es decir, los pilotos en pista tienen probabilidad 0 de tener un incidente.
- **Reglamentación oficial:** Por reglamento oficial de la competencia, cada piloto está obligado a realizar al menos una parada en boxes y ocupar dos compuestos diferentes de neumáticos, por lo tanto, quedan descartadas las combinaciones SS, DD, MM.

3.2. Formalización

Para nuestra construcción inicial, consideraremos únicamente una carrera con dos pilotos, bajo las consideraciones anteriormente hechas y suponiendo adicionalmente que ambos tienen un comportamiento idéntico en pista y coches de igual rendimiento; dicho esto formalmente tendremos el juego:

$$G = (\{1, 2\}, A, \{u_1, u_2\})$$

Donde

$$A = A_1 \times A_2$$

Con

$$A_i = B \times C, i = 1, 2$$

y

$$B = \{SD, DS, SM, MS, MD, DM\}$$

$$C = \{1, \dots, T - 1\}, T = \text{Total de vueltas del circuito}$$

$$v_i = \begin{cases} -|f_i - f_j| & \text{si } f_i > f_j \\ |f_i - f_j| & \text{si } f_j > f_i \\ 0 & \text{si } f_i = f_j \end{cases}, i=1,2$$

Con $f_k, k = 1, 2$ como se definen a continuación.

Definición 5 Para el jugador $k, k = 1, 2$, definimos su función contadora $f_k : A_k \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$f_k((**, *)) = \beta + \Psi\theta + (N - \Psi)\alpha + \rho\delta + (T - (N + \rho))\gamma + \epsilon$$

Donde:

- β = Tiempo en pits.

- $\theta = \begin{cases} 0 & \text{si el primer compuesto elegido es el suave} \\ \eta & \text{c.c} \end{cases}$

- η = Perdida por vuelta con respecto al neumático suave.

- Ψ = Vuelta a partir de la cual se comienza a desgastar el primer compuesto elegido.

- α = Factor de desgaste del primer compuesto elegido.

- $\rho = \begin{cases} 0 & \text{si el segundo compuesto elegido es el suave} \\ \varphi & \text{c.c} \end{cases}$

- φ = Vuelta a partir de la cual se empieza a degradar el segundo neumático.

- $\delta = \begin{cases} 0 & \text{si el segundo compuesto elegido es el suave} \\ \eta & \text{c.c} \end{cases}$

- γ = Factor de desgaste del segundo compuesto elegido.

- N = Vuelta de entrada a pits, con $N < T - \rho$

- T = Total de vueltas

- $\epsilon = \begin{cases} 0 & \text{si "k" arranca en primera posición} \\ 0.3 & \text{si "k" arranca en segunda posición} \end{cases}$ Para complementar a la definición anterior, tenemos la siguiente

Observación 1 ■ Sin perdida de generalidad para tener bien definido a η podemos considerar que el neumático suave pierde 0 seg. por vuelta con respecto a el mismo.

- $N(T, \varphi, \Psi)$, es decir, N depende del total de vueltas del circuito y de la elección de neumáticos, de hecho de la definición tenemos que N debe satisfacer $N < T - \rho$
- En la definición del juego, B corresponde a la elección de neumáticos para la carrera, mientras que C corresponde a la vuelta de entrada a pits, por el punto anterior podríamos poner aún más consideraciones al conjunto C , pero estas las podemos obviar de momento.
- Los parámetros presentes en las funciones contadoras son obtenidos por los equipos mediante simulaciones o durante las etapas de clasificación de los grandes premios.

De toda la construcción anterior podemos notar que tenemos un juego de suma cero, finito, no cooperativo con estrategias puras.

3.3. Ejemplo

A continuación presentamos el siguiente ejemplo, donde estudiamos un modelo específico.

Cicuito: **Mónaco**.

Teniendo los siguientes datos:

- $T = 78$

- $\beta = 25$ segs.

- Neumáticos sugeridos: Suave y duro.

Neumático suave:

- **10** vueltas para comenzar a desgastarse.
- **A partir de la decima vuelta se pierde 1 seg. por vuelta.**
- **Uso recomendado** de 20 a 30 vueltas.

Neumático duro:

- **Uso recomendado** de 30 a 60 vueltas.
- **20** vueltas para comenzar a desgastarse.
- En buen estado **0.7** segundos más lento por vuelta con respecto al neumático suave.
- En estado deteriorado **1.4** segundos más lento por vuelta con respecto al neumático suave.

Bajo las condiciones anteriores un jugador ”**racional**” toma

$$20 \leq N \leq 60$$

En este ejemplo, por cuestiones de simplicidad nosotros tomaremos $N \in \{20, 30, 50, 60\}$ De todos los datos anteriores se obtienen los parámetros para las funciones contadoras, más aún, note que en este caso por las sugerencias hechas podemos tomar a nuestros espacios de acciones como

$$A_i = B \times C, i = 1, 2$$

con $B = \{SD, DS\}$ y $C = \{20, 30, 50, 60\}$.

Ahora dado que nuestro juego considera la posición de salida, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el jugador 1 arranca primero, así se tiene:

$$f_1 = 25 + \Psi\theta + (N - \Psi)\alpha + \rho\delta + (T - (N + \rho))\gamma$$

Para el jugador 2:

$$f_2 = 25 + \Psi\theta + (N - \Psi)\alpha + \rho\delta + (T - (N + \rho))\gamma + 0,3$$

Primeramente, obtenemos la siguiente tabla la cual muestra la relación de las funciones contadoras de los jugadores

Jugador 1 \ Jugador 2	SD20	SD30	DS50	DS60
SD20	(102.2 , 102.5)	(102.2 , 98.5)	(102.2 , 99.3)	(102.2 , 103.3)
SD30	(98.2 , 102.5)	(98.2 , 98.5)	(98.2 , 99.3)	(98.2 , 103.3)
DS50	(99 , 102.5)	(99 , 98.5)	(99 , 99.3)	(99 , 103.3)
DS60	(103 , 102.5)	(103 , 98.5)	(103 , 99.3)	(103 , 103.3)

Cuadro 3: Relación de las funciones contadoras de los jugadores.

De aquí se deduce la matriz de pagos de nuestro juego, la cual estará dada por

$$V = \begin{matrix} & \begin{matrix} SD20 & SD30 & DS50 & DS60 \end{matrix} \\ \begin{matrix} SD20 \\ SD30 \\ DS50 \\ DS60 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,3 & -3,7 & -2,9 & 1,1 \\ 4,3 & 0,3 & 1,1 & 5,1 \\ 3,5 & -0,5 & 0,3 & 4,3 \\ -0,5 & -5,1 & -4,3 & 0,3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Ahora, nos gustaría ver si nuestro juego cuenta con EN, nosotros afirmamos que $(SD30, SD30)$ es un EN, en efecto, por la proposición 1 basta ver que $(SD30, SD30)$ es un punto silla de $v(a, b) = v_1(a, b) = -v_2(a, b)$, para ello note que

$$v_1(SD20, SD30) = -3,7 \leq 0,3 = v_1(SD30, SD30)$$

$$v_1(DS50, SD30) = 0,5 \leq 0,3 = v_1(SD30, SD30)$$

$$v_1(DS60, SD30) = -5,7 \leq 0,3 = v_1(SD30, SD30)$$

También

$$v_1(SD30, SD30) = 0,3 \leq 4,3 = v_1(SD30, SD20)$$

$$v_1(SD30, SD30) = 0,3 \leq 1,1 = v_1(SD30, DS50)$$

$$v_1(SD30, SD30) = 0,3 \leq 5,1 = v_1(SD30, DS60)$$

Así pues, de lo anterior se tiene lo afirmado.

Podemos observar que el EN encontrado, está relacionado con la estrategia donde el valor de las funciones contadoras fue el menor para ambos jugadores, es decir, la estrategia en donde se eligieron los neumáticos y entrada en pits de tal suerte que menos tiempo se perdiera para completar la carrera, más aún, podemos notar que la elección de esta estrategia está ligada también a la protección de posibles undercuts, overcuts y overtakes que el adversario podría realizar.

Como hemos podido notar, nuestro juego recae mucho en el uso de las funciones contadoras, culminamos esta subsección mostrando otro uso que le podemos dar a estas funciones. Realizando truncamientos por cada vuelta a las funciones contadores podemos de cierto modo "simular" la carrera, por ejemplo, supongamos que el jugador 1 elige $SD20$ y el jugador 2 elige $SD30$, en este caso tenemos el siguiente gráfico:

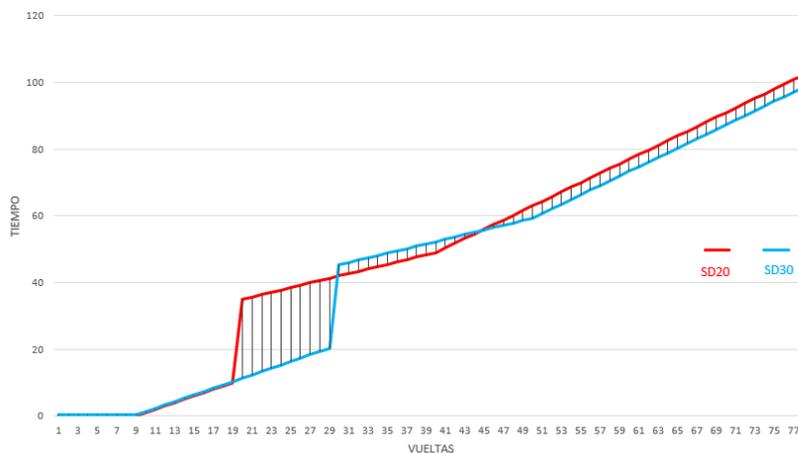


Figura 1: Simulación de $(SD20, SD30)$.

Es de esperarse que entre más tiempo pierda el jugador en un cierto lapso de la carrera, más lento se movió por el circuito, observando el gráfico podríamos decir lo siguiente entre la vuelta 29-31 el jugador 1 realizó un undercut al jugador 2, el

cual solo pudo mantener hasta la vuelta 43-47, después de la vuelta 49 el jugador 2 comenzó a liderar la carrera (se dio un overtake por desgaste, recordemos que un jugador racional permite este overtake, pues el mantener la posición podría provocar un mayor desgaste o un incidente) y así se mantuvo hasta el final. Presentamos a continuación otro ejemplo, el cuál corresponde a nuestro EN, i.e, a $(SD30, SD30)$

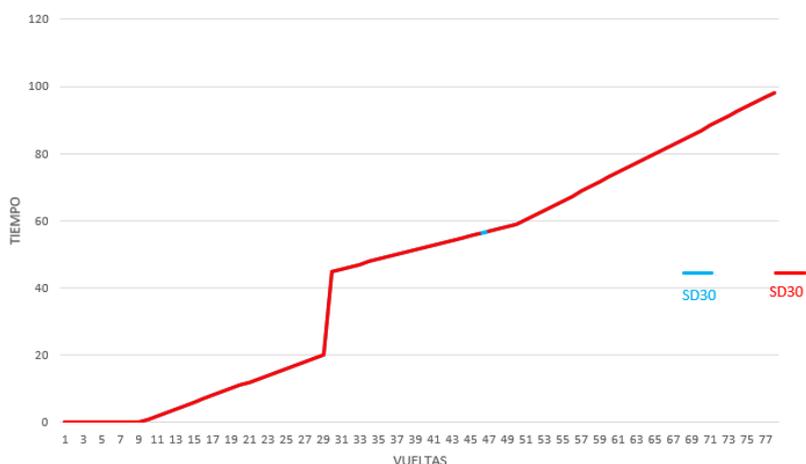


Figura 2: Simulación de $(SD30, SD30)$.

Podemos notar que en este caso la diferencia a lo largo de la carrera, entre el tiempo perdido del jugador 1 y del jugador 2 es indistinguible y se mantiene a lo largo del total de vueltas.

Finalmente presentamos la simulación de $(SD30, DS60)$, en este caso podemos notar que el jugador 2 opta por una estrategia de resistencia, pues lleva al límite a sus neumáticos, usualmente las estrategias de resistencia se dan para buscar overcuts, como podremos notar en este caso, el jugador 2 intenta el overcut en la vuelta 30-31, pero no lo pudo mantener, ya que en la vuelta 59-61 el jugador 1 recupero el liderato y lo mantuvo hasta el final de la carrera.

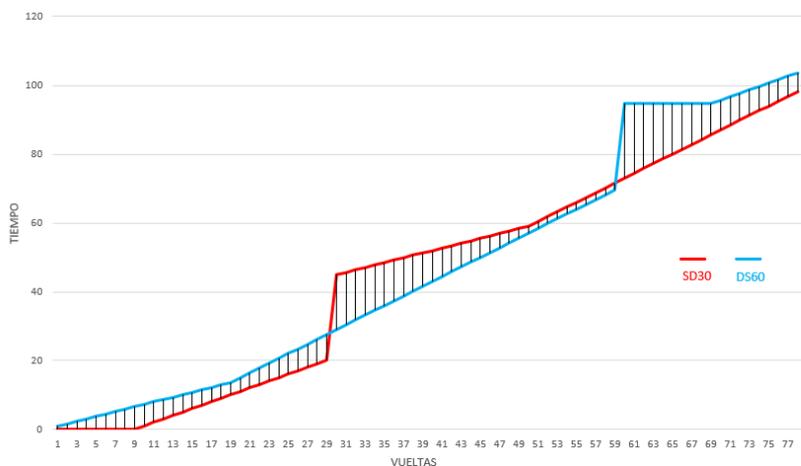


Figura 3: Simulación de $(SD30, DS60)$.

4. Caracterización de los Equilibrios de Nash

En el ejemplo presentado, vimos que el EN encontrado está en estrecha relación con las estrategias donde las respectivas funciones contadoras tienen su mínimo valor, esta relación no es una casualidad, presentamos a continuación el siguiente resultado.

Proposición 2 (*Caracterización de los Equilibrios de Nash*)

Sea G el juego definido en la subsección 3.2, entonces $f_1(a^*) \leq f_1(a)$, $\forall a \in A_1$ y $f_2(b^*) \leq f_2(b)$, $\forall b \in A_2$ si y sólo si (a^*, b^*) es un EN para G .

Demostración.-

\Rightarrow) Dado que G es un juego de suma cero, por la proposición 1 solo es necesario verificar que (a^*, b^*) es un punto silla. Pongamos

$$v(a, b) = v_1(a, b) = -v_2(a, b), \quad \forall (a, b) \in A_1 \times A_2$$

Y sea $(a, b) \in A_1 \times A_2$ arbitrario, procedemos por casos, se tiene:

Caso 1:

$$f_1(a^*) \leq f_2(b^*) \leq f_1(a) \leq f_2(b) \dots (1)$$

Notemos que $f_1(a^*) \leq f_2(b^*)$ y $f_2(b^*) \leq f_1(a)$, luego por la definición de v_1 se sigue que

$$v_1(a^*, b^*) \geq 0 \text{ y } v_1(a, b^*) \leq 0$$

De donde

$$v(a, b^*) \leq v(a^*, b^*) \dots (2)$$

También de (1) se tiene

$$|f_1(a^*) - f_2(b^*)| \leq |f_1(a^*) - f_2(b)|$$

y como $f_1(a^*) \leq f_2(b^*) \leq f_2(b) \dots (1)$ de esto y la definición de v_1 se sigue que

$$v_1(a^*, b^*) \leq v_1(a^*, b) \Rightarrow v(a^*, b^*) \leq v(a^*, b) \dots (3)$$

Así de (2) y (3) podemos concluir este caso.

Caso 2:

$$f_1(a^*) \leq f_1(a) \leq f_2(b^*) \leq f_2(b) \dots (4)$$

Como $f_1(a^*) \leq f_1(a) \leq f_2(b^*)$, se sigue que

$$|f_1(a) - f_2(b^*)| \leq |f_1(a^*) - f_2(b^*)|$$

Luego de la definición de v_1 se deduce

$$v_1(a, b^*) \leq v_1(a^*, b^*) \Rightarrow v(a, b^*) \leq v(a^*, b^*) \dots (5)$$

Ahora de (4) notamos que $f_1(a^*) \leq f_2(b^*) \leq f_2(b)$, luego

$$|f_1(a^*) - f_2(b^*)| \leq |f_1(a^*) - f_2(b)| \Rightarrow v_1(a^*, b^*) \leq v_1(a^*, b)$$

Y se sigue que

$$v(a^*, b^*) \leq v(a^*, b) \dots (6)$$

Luego de (5) y (6) podemos concluir este caso.

La prueba de los siguientes casos es análoga a la realizada en los casos 1 y 2

Caso 3: $f_1(a^*) \leq f_2(b^*) \leq f_2(b) \leq f_1(a)$

Caso 4: $f_2(b^*) \leq f_2(b) \leq f_1(a^*) \leq f_1(a)$

Caso 5: $f_2(b^*) \leq f_1(a^*) \leq f_2(b) \leq f_2(a)$

Caso 6: $f_2(b^*) \leq f_1(a^*) \leq f_1(a) \leq f_2(b)$

Así pues por lo anteriormente probado podemos concluir que

$$v(a^*, b) \leq v(a^*, b^*) \leq v(a, b^*), \quad \forall (a, b) \in A_1 \times A_2$$

Y por lo tanto (a^*, b^*) es un EN.

\Leftarrow) Procedemos por contradicción, para ello supongo que existen $l \in A_1, d \in A_2$ tales que $f_1(l) < f_1(a^*)$ y $f_2(d) < f_2(b^*)$, se tienen los siguientes casos:

Caso 1:

$$f_1(l) < f_1(a^*) \leq f_2(d) < f_2(b^*)$$

Es fácil ver que

$$|f_1(l) - f_2(b^*)| > |f_1(a^*) - f_2(b^*)|$$

luego como $f_1(l) < f_2(b^*)$ y $f_1(a^*) < f_2(b^*)$ de la definición de v_1 , se sigue que

$$v_1(l, b^*) > v_1(a^*, b^*) \dots (7)$$

pero al ser (a^*, b^*) EN

$$v_1(a^*, b^*) \geq v_1(l, b^*) \dots (8)$$

luego de (7) y (8) tenemos

$$v_1(l, b^*) > v_1(l, b^*)$$

lo cual es una contradicción.

Caso 2:

$$f_2(d) \leq f_1(l) \leq f_2(b^*) \leq f_1(a^*)$$

Observemos que si $f_1(l) = f_2(b^*)$ entonces $f_2(b^*) < f_1(a^*)$ así $v_1(a^*, b^*) < 0$ y $v_1(l, b^*) = 0$ de donde

$$v_1(l, b^*) > v_1(a^*, b^*)$$

y de forma similar al caso 1, llegamos a una contradicción.

Ahora si $f_1(l) < f_2(b^*)$ se puede ver que $v_1(l, b^*) > 0$ y $v_1(a^*, b^*) \leq 0$, luego

$$v_1(l, b^*) > v_1(a^*, b^*)$$

y llegamos a una contradicción.

Un razonamiento análogo lo ocupamos cuando $f_2(b^*) = f_1(a^*)$ y $f_2(b^*) < f_1(a^*)$.

Caso 3:

$$f_2(d) < f_2(b^*) \leq f_1(l) < f_1(a^*)$$

Notemos que

$$|f_2(b^*) - f_1(a^*)| > |f_2(b^*) - f_1(l)| \Rightarrow -|f_2(b^*) - f_1(a^*)| < -|f_2(b^*) - f_1(l)| \dots (9)$$

y como $f_2(b^*) \leq f_1(l)$ y $f_2(b^*) < f_1(a^*)$ de esto, de (9) y de la definición de v_1 se sigue que:

$$v_1(l, b^*) > v_1(a^*, b^*)$$

lo cual nos conduce a una contradicción.

Finalmente tenemos los siguientes

Caso 4: $f_1(l) \leq f_2(d) \leq f_1(a^*) \leq f_2(b^*)$

Caso 5: $f_2(d) \leq f_1(l) \leq f_2(b^*) \leq f_1(a^*)$

Caso 6: $f_1(l) < f_2(d) < f_2(b^*) < f_1(a^*)$

Caso 7: todos los posibles reacomodos de los anteriores casos, manteniendo las desigualdades permitidas.

Estos casos los podemos analizar de forma completamente análoga a los ya hechos, llegando en todos a una contradicción, así pues podemos concluir que no existen $l \in A_1$, $d \in A_2$ tales que $f_1(l) < f_1(a^*)$ y $f_2(d) < f_2(b^*)$, de donde $f_1(a^*) \leq f_1(a)$, $\forall a \in A_1$ y $f_2(b^*) \leq f_2(b)$, $\forall b \in A_2$ como se quería probar \square

Probaremos a continuación que para nuestro juego siempre existen EN , se tiene la siguiente

Proposición 3 (*Existencia de Equilibrios de Nash*)

Sea G el juego definido en la subsección 3.2, entonces G tiene al menos un Equilibrio de Nash.

Demostración.-

Por la proposición 2, basta encontrar $a^* \in A_1$, $b^* \in A_2$ tales que $f_1(a^*) \leq f_1(a)$, $\forall a \in A_1$ y $f_2(b^*) \leq f_2(b)$, $\forall b \in A_2$, pero esto se sigue inmediatamente de notar que $Im(f_i)$ es finita, para $i = 1, 2$, luego existe $c_i \in Im(f_i)$ tal que $c_i \leq l_i$, $\forall l_i \in Im(f_i)$, de donde se deduce rápidamente lo que queremos \square .

Así de los dos resultados aquí presentados podemos notar que, para este juego, toda la información estará contenida en las funciones contadoras.

5. Generalizaciones

La construcción dada en la subsección 3.2 la podemos generalizar de la siguiente forma:

- Diferente rendimiento de pilotos y autos: En este caso tendremos una construcción en completo análoga a la ya hecha, solo tendremos cambios en los parámetros de las funciones contadoras, pues en este caso estos parámetros serán posiblemente diferentes para cada piloto.
- Dos entradas a pits: En este caso tendremos

$$G = (\{1, 2\}, A, \{u_1, u_2\})$$

Donde

$$A = A_1 \times A_2$$

Con

$$A_i = B \times C \times D, i = 1, 2$$

y

$$B = \{SMD, MDS, SMS, \dots\}$$

$$C = \{1, \dots, \lfloor \frac{T}{2} \rfloor\}$$

$$D = \{\lfloor \frac{T}{2} \rfloor + 1, \dots, T\}, T = \text{Total de vueltas del circuito.}$$

$$v_i = \begin{cases} -|g_i - g_j| & \text{si } g_i > g_j \\ |g_i - g_j| & \text{si } g_j > g_i \\ 0 & \text{si } g_i = g_j \end{cases}, i=1,2$$

Las funciones g_k se pueden definir a partir de las funciones f_k de la primer construcción.

Para este juego B se referirá a la elección ordenada de neumáticos, C a la primer entrada en pits y D a la segunda entrada en pits.

- Coche de seguridad: La posible aparición de algún coche de seguridad en el transcurso de la carrera, puede afectar directamente la estrategia de paradas en pits. De cada pista se pueden obtener probabilidades de aparición del coche de seguridad en distintos intervalos de la carrera, luego estas probabilidades se pueden asociar a estrategias mixtas (para una explicación más detallada de juegos en estrategias mixtas ver [1]) para el juego aquí construido, un ejemplo de un juego en estrategias mixtas aplicado al contexto de la F1 se puede consultar en [9].

6. Conclusiones

En este estudio, se ha construido un modelo de juego de suma cero para simular una carrera de Fórmula 1, y se han caracterizado los Equilibrios de Nash (EN) de dicho juego. A través de este enfoque, hemos logrado analizar las estrategias óptimas que los corredores pueden adoptar durante la competencia, considerando la interacción estratégica entre ellos.

Sin embargo, es importante destacar que nuestro modelo tiene ciertas limitaciones y simplificaciones. Por ejemplo, no hemos considerado factores como las estrategias de adelantamiento (puede consultar [10] para un enfoque de este tipo), los efectos de la estrategia de pits o la interacción con otros corredores rezagados. Estas limitaciones brindan oportunidades para investigaciones futuras, donde se puede enriquecer el modelo con elementos adicionales para capturar aún más la complejidad de las carreras de Fórmula 1.

En resumen, este estudio ha proporcionado una visión interesante sobre la aplicación de la teoría de juegos a las carreras de Fórmula 1, construyendo un juego de suma cero y caracterizando los EN. Estos hallazgos contribuyen al entendimiento de la estrategia en las competencias de alto nivel y abren nuevas perspectivas para futuras investigaciones en este emocionante campo de estudio.

Referencias

- [1] R. GIBBONS, *Game theory for applied economists*. Princeton, N.J. :Princeton University Press, 1958.
- [2] F.M. GRÉGOIRE, *The Definitive Guide for Formula 1*, 2018.
- [3] A. HAURIE, J.B. KRAWCZYK Y G. ZACCOUR, *Games and dynamic games*. World Scientific, Singapore, 2012.
- [4] A. FILATOV, *F1 Strategy: Optimization, Probability, and Game Theory*, 2022.
- [5] KEBERZ ENGINEERING, *Overtaking in Formula 1, the 2022 season update*, 2022. URL.: <https://www.keberz.com/post/overtaking-in-formula-1-the-2022-season-update>
- [6] W.J. WEST Y D. J. N. LIMEBEER, *Optimal Tyre Management of a Formula One car*, IFAC-Papers OnLine, Volume 53, Issue 2, 2020, pp. 14456-14461, ISSN 2405-8963.
- [7] M. MITRE BÁEZ, *Generalizaciones del Teorema Minimax y Equilibrios en Juegos de Suma Cero*, pp 1-4, 2014.
- [8] I. FERNÁNDEZ ISASI, *Juegos de suma cero. Teoremas de Von Neumann, Sion y Kneser-Fan*, pp 19-33, 2016.
- [9] J.WITTLE, *The Game Theory of Formula 1: Winning the Monaco Grand Prix*, 2012.
- [10] M.M. CRUDELE, G. DEL FIUME Y A. MARCOMINI, *Formula 1 Grand Prix Simulator: a Dynamic Game Theory Approach*.