VARIABLE COMPLEJA
Lista 3

(Solución)

1. Evaluar la sumatoria $\sum_1^\infty n^{-4}$, empleando la descomposición en fracciones parciales de $\cot \pi z$.

Solución. Partimos de $\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}$.

Se compara con

$$\begin{aligned}
\pi \cot \pi z &= \frac{\pi \cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z} = \frac{\pi(1-\frac{1}{2!}(\pi z)^2+\cdots)}{\pi z - \frac{1}{3!}(\pi z)^3+\cdots} \\
&= \frac{\pi(1-\frac{1}{2}\pi^2 z^2 + \frac{1}{24}\pi^4 z^4+\cdots)}{\pi z(1-\frac{1}{6}\pi^3 z^3+\frac{1}{120}\pi^5 z^5+\cdots)} \\
&= \frac{1}{z}(1-\frac{1}{3}\pi^2 z^2 - \frac{1}{45}\pi^4 z^4+\cdots) \\
&= \frac{1}{z} - \frac{1}{3}\pi^2 z - \frac{1}{45}\pi^3 z^3 + \cdots,
\end{aligned}$$

para obtener que $\pi \cot \pi z - 1/z$ es igual a

$$\sum_1^\infty \frac{2z}{z^2-n^2} = -\frac{1}{3}\pi^2 z - \frac{1}{45}\pi^4 z^3 + \cdots.$$

Al dividir por $2z$,

$$\sum_1^\infty \frac{1}{z^2-n^2} = -\frac{1}{6}\pi^2 - \frac{1}{90}\pi^4 z^2 + \cdots.$$

y luego al poner $z=0$ se obtiene $\sum_1^\infty n^2 = \frac{\pi^2}{6}$. Luego

$\sum_1^\infty \frac{1}{z^2-n^2} = \sum_1^\infty \left(-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\frac{z^2}{z^2-n^2}\right) = -\frac{\pi^2}{6} + \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}\frac{z^2}{z^2-n^2}$, luego

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}\frac{z^2}{z^2-n^2} = -\frac{1}{90}\pi^4 z^2 + \cdots.$$

Al dividir por z^2 y poner $z=0$ se obtiene

$$\sum_1^\infty n^4 = \frac{\pi^4}{90}.$$

2. Sea $g_2(z) = \sum_{(m,n)\neq(0,0)} (m+nz)^{-4}$.

   (a) Demostrar que la serie doble converge a una función holomorfa en el

semiplano $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$. (Recordar que las series dobles se pueden convertir en series simples, por ejemplo tomando $\{m+n \leq N\}$ e indexando con N.)
(b) Sea $T(z) = (az+b)/(cz+d)$ (donde a, b, c, d enteros, $ad - bc = 1$). Demostrar:

$$g_2(T(z))T'(z)^2 = g_2(z).$$

Solución. (a) Todo compacto en $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ está dentro de una región $|x| < 1/\epsilon$, $y > \epsilon$ con $0 < \epsilon < 1$. Para $z = x + iy$ en esta región tenemos

$$\begin{aligned} |m| &= |(m+nx) - \frac{x}{y}(ny)| \leq |m+nx| + \frac{1}{\epsilon^2}ny \leq \frac{4}{C}|m+nx| + |ny|) \\ |n| &= |\frac{1}{y}(ny)| \leq \frac{1}{\epsilon}ny \leq \frac{4}{C}(|m+nx| + |ny|) \end{aligned}$$

donde $C = 4\epsilon^2 < 1$. De esto $|m+nz| \geq 2(|m+nx| + |ny|) \geq C(|m| + |n|)$. En consecuencia tenemos

$$\sum_{m,n} |m+nz|^{-4} \leq C^{-4} \sum_{m,n} (|m| + |n|)^{-4} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|m|+|n|=k} (|m| + |n|)^{-4}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} (4k)k^{-4} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} < \infty$$

porque hay $4k$ pares (m, n) con $|m| + |n| = k$. Luego la serie para $g_2(z)$ converge uniformemente en el compacto. Luego g_2 es holomorfa porque cada sumando lo es. Además la serie converge absolutamente.
(b) Primero notar que $(m + nT(z))^{-4}T'(z)^2 = (m + n\frac{az+b}{cz+d})^{-4}((ad-bc)(cz+d)^{-2})^2 = (m' + n'z)^{-4}$ donde $m' = bn + dm$, $n' = an + cm$. La correspondencia $(m, n) \leftrightarrow (m', n')$ es invertible pues $m = cm' - dn'$, $n = -am' + bn'$ (para esto necesitamos usar $ad - bc = 1$). Como la serie que define g_2 converge absolutamente, $g_2(T(z))T'(z)^2 = \sum_{(m,n)} (m + nT(z))^{-4}T'(z)^2 = \sum_{(m',n')} (m' + n'z)^{-4} = g_2(z)$.

3. Demostrar: $\displaystyle\prod_{k=0}^{\infty}(1 + \frac{1}{2^{2^k}}) = 2.$

Solución. Por inducción se verifica que $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1 + 2^{-2^k}) = \sum_{j=0}^{2^{2^n}-1} 2^{-j}$. Esto tiende al límite $2 \neq 0$ cuando $n \to \infty$.

4. ¿Cuáles de estos productos convergen/divergen? ¿absolutamente? ¿para cuáles z (en su caso)?

(a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}(1 + (-1)^k k^{-1/3})$

Solución. Sea $a_k = (-1)^k k^{-1/3}$. Para la convergencia del producto se considera

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \log(1+a_k) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} a_k^n \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k - \frac{1}{2}a_k^2 + \frac{1}{3}a_k^3 + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} a_k^n \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}a_k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3}a_k^3 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} a_k^n
\end{aligned}$$

donde separamos los cuatro sumandos provisionalmente (o sea, sin haber determinado si convergen o no). La primera y tercera sumatoria convergen por los términos de signos alternantes que decrecen a cero. La cuarta sumatoria converge por lo siguiente: sus términos para $k \geq 2$ son sumatorias acotadas por una serie geométrica

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{a_k^n}{n} < \sum_{n=4}^{\infty} k^{-n/3} = \frac{k^{-4/3}}{1-k^{-1/3}} < 2k^{-4/3}.$$

luego

$$\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=4}^{\infty} \frac{a_k^n}{n} < 2\sum_{k=2}^{\infty} k^{-4/3} < 2\zeta\left(\frac{4}{3}\right) < \infty.$$

El término para $k = 1$ es finito por alternancia. Así la cuarta sumatoria es convergente (absolutamente si descartamos $k = 1$). Puesto que la segunda sumatoria no es convergente, $\sum \log(1+a_k)$ no es convergente, luego el producto tampoco.

(b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$, donde

$a_k = 1/\sqrt{k}$ para k impar, $a_k = -1/\sqrt{k} + 1/k$ para k par.

Solución. $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = 1 + (\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}) + \frac{1}{\sqrt{3}} + (\frac{-1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{4}) + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots$ Sabemos que $1 + \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{-1}{\sqrt{4}} + \cdots$ converge, mientras $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots = \infty$. Por lo tanto $\sum a_k = \infty$, por lo que $\sum |a_k| = \infty$, luego el producto no converge absolutamente. Pero

$$\begin{aligned}
\log(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}) &= \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right), \\
\log(1 - \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k}) &= -\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2k} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right),
\end{aligned}$$

cuando $k \to \infty$, como se puede verificar por la serie para $\log(1+t)$ en $t = 0$, y observando $1/\sqrt{k} - 1/k = O(1/\sqrt{k})$. Puesto que $\sum 1/k^{3/2} < \infty$, para n par tenemos (por cancelación de términos consecutivos) que

$$\begin{aligned}
\sum_{1}^{n} \log(1+a_k) &= 0 + \sum_{1}^{n} \frac{1}{k^{3/2}} \to \zeta(\frac{3}{2}), \\
\sum_{1}^{n+1} \log(1+a_k) &= -\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{n} + \sum_{1}^{n} \frac{1}{k^{3/2}} \to \zeta(\frac{3}{2}).
\end{aligned}$$

Así $\sum_1^n \log(1+a_k)$ es convergente, luego $\prod(1+a_k)$ también es convergente.

(c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{z^2}{k^2})$

Solución. Para cualquier $z \in \mathbb{C}$, la suma $\displaystyle\sum_k \frac{|z|^2}{k^2}$ converge por lo que el producto converge absolutamente. Para z en una región acotada la suma converge uniformemente, luego el producto también (y es una función holomorfa de z).

(d) $(1-\frac{z}{1})(1+\frac{z}{1})(1-\frac{z}{2})(1+\frac{z}{2})(1-\frac{z}{3})\cdots$

Solución. Pongamos $a_k = -z/((k-1)/2)$ para k impar, $a_k = a/(k/2)$ para k par. Notar que para $z \in \mathbb{Z}-\{0\}$, uno de los factores $1+a_k$ del producto es cero, entonces habrá que limitar las observaciones a $k > |z|$. La suma $-1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\cdots$ tiene como sumas parciales la sucesión

$$-1,\ 0,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ 0,\ \ldots$$

por lo que $\sum a_k$ no converge si $z \neq 0$. Así el producto solamente converge absolutamente para $z = 0$.
Para z fijo, Cuando n es par,

$$\prod_1^n(1+a_k) = \prod_{j=1}^{n/2}\left(1-\frac{z^2}{(n/2)^2}\right) = L(z)+\epsilon(z,n)$$

donde $L(z)$ es el límite que da el inciso (c) y $\epsilon(z,n) \to 0$. Así

$$\prod_1^{n+1}(1+a_k) = \left(1-\frac{z}{n+1}\right)(L(z)+\epsilon(z,n)) \to L(z)$$

y como es el mismo límite, el producto es convergente, cualquiera que sea $z \in \mathbb{C}$.