VARIABLE COMPLEJA $\#9$

COMPORTAMIENTO EN LA FRONTERA DE TRANSFORMACIÓN CONFORME

$\mathbb{D} = B_1(0)$.

9.1. Nota. Un homeomorfismo $f\colon D \to D'$ entre dominios puede no extenderse a un homeomorfismo $\operatorname{cerr} D \to \operatorname{cerr} D'$. Por ejemplo, $D = \{0 < x < 1,\ |y| < 1\}$, $f(x,y) = (x, xy)$, $D' =$ triángulo. En este ejemplo f es de hecho un difeomorfismo pero no se extiende a un homeomorfismo cerca de $x = 0$.

9.2. Definición. Un punto $\zeta_0 \in \partial D$ es un punto frontera accesible de D si existe una curva $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ con $\gamma([0,1)) \subseteq D$, $\gamma(1) = \zeta_0$.

(Hay un refinamiento de la noción de punto frontera accesible, en que se toma en cuenta la forma en que la curva aproximante γ tiende al punto frontera ζ_0, tomando en cuenta homotopía: curvas aproximantes no equivalentes determinan “puntos fronterizos accesibles” distintos con el mismo ζ_0.)

Definición. Sea $z_n \in D$.
Decimos $z_n \to \partial D$ cuando $(\forall K \overset{\text{cpto.}}{\subseteq} D)(\exists N)\ n \geq N \ \Rightarrow\ z_n \notin K$.
Sea $\gamma\colon [0,1) \to D$.
Decimos $\gamma \to \partial D$ cuando $(\forall K \overset{\text{cpto.}}{\subseteq} D)(\exists t_0)\ t \geq t_0 \ \Rightarrow\ \gamma(t) \notin K$.

Proposición. Sea $f\colon D \to D'$ un homeomorfismo. Si $z_n \to \partial D$ entonces $f(z_n) \to \partial D'$. Si $\gamma \to \partial D$ entonces $f(z_n(\gamma)) \to \partial D'$.

9.3. Definición. Una curva $\sigma \subseteq \partial D$ es un arco frontera libre si $(\forall z \in \sigma)(\exists$ vecindad V de $z)\ V \cap \partial D \subseteq \sigma$.

Sea σ un segmento que es un arco frontera libre en ∂D. Entonces $z \in \sigma$ es un punto frontera de 1 lado si algún disco centrado en z intersecta a D en un semidisco. De otro modo (dos semidiscos) es de 2 lados. Todos los $z \in \sigma$ son del mismo número de lados 1 ó 2, y se dice que σ es un segmento frontera libre de 1 lado o de 2 lados.

(Cuando σ es de 2 lados, las curvas en $\operatorname{cerr} D$ que se acercan a $\zeta_0 \in \sigma$ desde uno u otro semidisco definen "puntos frontera accesibles" distintos.) (Se dió la definición para un segmento σ, pero podría ser una curva.)

<u>Teorema.</u> Sea $\sigma \subseteq \partial D$ un segmento frontera libre de 1 lado. Sea $f\colon D \to \mathbb{D}$ una transformación conforme. Entonces f se extiende a una función holomorfa inyectiva en una vecindad de $D \cup \sigma$, y $f(\sigma)$ es un arco de $\partial\mathbb{D}$.
La demostración utilizará el Principio de la Reflexión.

9.4. <u>Teorema.</u> (Principio de la Reflexión para Funciones Armónicas) Sea $D^+ \subseteq P^+ = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ un dominio con un segmento (abierto) $\sigma \subseteq \partial D^+ \cap \mathbb{R}$. Sea $D^- = \{\overline{z}\colon\ z \in D^+\}$. Sea $v \in C(D^+ \cup \sigma, \mathbb{R})$ tal que $v|_{D^+} \in \operatorname{Ar} D^+$ y $v|_\sigma = 0$. Defínase

$$V(z) = \begin{cases} v(z), & z \in D^+ \cup \sigma, \\ -v(\overline{z}), & z \in D^-. \end{cases}$$

Entonces $V \in \operatorname{Ar}(D^+ \cup \sigma \cup D^-)$.

<u>Corolario.</u> (Principio de la Reflexión para Funciones Holomorfas) Sea $f \in \mathcal{H}(D^+)$. Supóngase que $\operatorname{Im} f \to 0$ cuando $z \to \sigma$. Defínase

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D^+, \\ \overline{f(\overline{z})}, & z \in D^-. \end{cases}$$

Entonces existe una forma de definir $F(x)$ para $x \in \sigma$ de manera que que y $F \in \mathcal{H}(D^+ \cup \sigma \cup D^-)$.

9.5. <u>Definición.</u> $\sigma\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ es un <u>arco analítico</u> si localmente se expresa como una serie de potencias (de una variable real); i.e., σ se extiende a una función holomorfa en un a vecindad de $\sigma \subseteq \mathbb{C}$. Se dice que σ es <u>regular</u> si $(\forall t)\ \sigma'(t) \neq 0$. Se dice que σ es <u>simple</u> si es inyectiva.

<u>Teorema.</u> Si $\sigma \subseteq \partial D$ es un arco frontera libre simple, regular, de 1 lado, entonces la transformación conforme (de Riemann) $f\colon D \to \mathbb{D}$ se extiende holomorfamente a (una vecindad de) $D \cup \sigma \to \mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$.

<u>Proposición.</u> Sea $\sigma \subseteq \partial D$ un arco frontera libre simple, regular, de 2 lados. Sean V_1, V_2 semi-discos que son componentes conexos de $V \cap D$,

donde V es un disco centrado en $\zeta_0 \in \sigma$. Entonces la restricción $f|_{V_1}$ de la transformación conforme $f\colon D \to \mathbb{D}$ se extiende holomorfamente a $V_1 \cup \sigma$ y es inyectiva en σ.

VARIABLE COMPLEJA $\#10$

TRANSFORMACIÓN CONFORME DE POLÍGONOS

Veremos que para polígonos la transformación conforme se extiende a la frontera. La principal dificultad está en los vértices.

10.1. Sea ∂D un polígono (simple) de n lados con ángulos internos $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, …, $\alpha_n\pi$ $(0 < \alpha_k < 2)$ en los vértices $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Los ángulos externos son $\beta_k\pi$, $\beta_k = 1 - \alpha_k$. Entonces D es convexo $\iff$ $\beta_k > 0$ para todo k.

<u>Proposición.</u> $\sum_1^n \beta_k = 2$.

<u>Proposición.</u> Sea $f\colon D \to \mathbb{D}$ conforme. Entonces f se extiende a un homeomorfismo $\operatorname{cerr} D \to \operatorname{cerr} \mathbb{D}$.

(Este es un caso particular de un teorema de Carathéodory, que dice que la proposición anterior es válida cuando D es un dominio de Jordan. No lo demostraremos en este curso, ver `http:....`)

Sea $F = f^{-1}\colon \mathbb{D} \to D$, donde D es el polígono descrito arriba.
<u>Teorema.</u> (Fórmula de Schwarz-Christoffel) Sea $w_k \in \partial\mathbb{D}$ el punto frontera que F envía al vértice z_k de D. Entonces

$$F(w) = c \int_0^w \frac{dw}{(w-w_1)^{\beta_1}(w-w_2)^{\beta_2}\cdots(w-w_n)^{\beta_n}} + c'$$

donde c, c' son constantes.

VARIABLE COMPLEJA #11

TRANSFORMACIÓN CONFORME DE POLÍGONOS CIRCULARES

11.1. Primero veamos la fórmula de Schwarz-Christoffel de otro punto de vista. Pensemos en la función $F\colon P^+ \to D$ donde D es dominio poligonal. Sean $w_1, w_2, \ldots \in \mathbb{R}$ los puntos tales que $z_k = F(w_k)$ es vértice de D (los prevértices del map F).

La reflexión de F a lo largo de un intervalo (w_k, w_{k+1}) produce un polígono (imagen de P^-) que es contiguo a D por la arista (z_k, z_{k+1}). Al reflejar por otro segmento $(w_{k'}, w_{k'+1})$ se produce una funcion F_1 en P^+ que tiene como un imagen un polígono obtenido de D por dos reflexiones, o sea, de la forma $z \mapsto Az + B$. Así

$$F_1(w) = AF(w) + B.$$

De esto se deduce

$$\frac{F_1''}{F_1'} = \frac{F''}{F'}.$$

Esto puede expresarse en términos del operador diferencial no lineal $\Phi u = u''/u'$, que satisface $\Phi T = 0$ donde $T(z) = Az + B$. Se puede definir también como $\Phi u = (\log u')'$.

Proposición. (1) $\Phi(u \circ v) = ((\Phi u) \circ v)v' + \Phi v$.

(2) Dada una función φ, se puede resolver $\Phi u = \varphi$ con

$$u = k_1 \int e^{\int \varphi} + k_2.$$

(3) Si $\Phi F_1 = \Phi F$, entonces $F_1 = AF + B$ para constantes A, B.
(El recíproco de esto ya se vió arriba.)

11.2. Volvemos al map $F\colon P^+ \to D$ del polígono. Sea $\varphi(w) = (\Phi F)(w)$. Es holomorfa en P^+. Se puede reemplazar F con $AF + B$ para lograr que una arista dada sea enviada en los reales. Este reemplazo no modifica ΦF, luego φ es real en las pre-aristas (w_k, w_{k+1}). Además, al extender F por reflexión por dos pre-aristas, las dos extensiones difieren por $z \mapsto Az + b$. Puesto que la continuación analítica respeta las derivadas y las operaciones aritméticas (Principio de Permanencia, que estudiaremos después), se obtiene la misma φ en P^- por reflexión de cualquier segmento en $\widehat{\mathbb{R}} \setminus \{w_k\}$. Así extendida, φ es univaluada en $\widehat{\mathbb{R}} \setminus \{w_k\}$, donde es claramente holomorfa.

Falta ver qué tipo de singularidad tiene ΦF en w_k, ya sabemos hacerlo para F (y el resultado debería ser consistente con el concepto de singularidad aislada):

$$\begin{aligned} z \;=\; F(w) &= z_k + t^{\alpha_k} \quad (\text{donde } t = (z - z_k)^{1/\alpha_k}) \\ &= z_k + (w - w_k)^{\alpha_k} G_k(w) \quad (\text{con } G_k \text{ holomorfa en } w_k), \\ F'(w) &= (w - w_k)^{\alpha_k - 1} \widehat{G}_k(w) \quad \widehat{G}_k \text{ holomorfa, } \widehat{G}_k(w_k) \neq 0), \\ F''(w) &= (w - w_k)^{\alpha_k - 2} ((\alpha_k - 1)\widehat{G}_k(w) + (w - w_k)\widehat{G}_k'(w)) \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \varphi(w) &= \frac{F''(w)}{F'(w)} = \frac{1}{w - w_k} \frac{(\alpha_k - 1)\widehat{G}_k(w) + (w - w_k)\widehat{G}_k'(w)}{\widehat{G}_k(w)} \\ &= \frac{\alpha_k - 1}{w - w_k} + O(1) \end{aligned}$$

cerca de w_k. Razonando como antes, la función

$$\varphi(w) + \sum \frac{\beta_k}{w - w_k}$$

no tiene singularidad en ningun w_k, por reflexión se extiende a P^-, además se calcula

$$\varphi(w) \;=\; \frac{-2}{w} + O(\frac{1}{w^2}) \quad (w \to \infty),$$

así φ es holomorpha en $w = \infty$ y obviamente la sumatoria lo es también. Así $\varphi(w) + \sum \beta_k/(w - w_k)$ es holomorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$ y por el Teorema de Liouville es constante. El valor es cero pues $\varphi(\infty) = 0$. Por lo tanto sabemos $\varphi(w) = -\sum \frac{\beta_k}{w - w_k}$ y podemos resolver para F con $\Phi F = \varphi$ para obtener otra vez la fórmula de Schwarz-Christoffel.

11.3. Ahora sea D un polígono circular, es decir, las aristas son arcos de círculos en $\widehat{\mathbb{C}}$. Cambiamos las letras, $f\colon P^+ \to D$, $w = f(z)$, $z \in P^+$, $w \in D$.

Una reflexión en un círculo es $(A_1\overline{z} + B_1)/(C_1\overline{z} + D_1)$ luego dos reflexiones se componen para dar una transformación de la forma

$$Tz = \frac{Az + B}{Cz + D}.$$

11.4. Queremos un operador que aniquile a toda $T \in \operatorname{Aut}\widehat{\mathbb{C}}$. Observamos las derivadas

$$\begin{aligned} T'(z) &= \frac{1}{(Cz+D)^2} \quad (\text{ suponiendo } AD - BC = 1), \\ T''(z) &= \frac{-2C}{(Cz+D)^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{T''(z)}{T'(z)} &= \frac{-2C}{Cz+D} \\ \left(\frac{T''(z)}{T'(z)}\right)' &= \frac{2C^2}{(Cz+D)^2} \\ \left(\frac{T''(z)}{T'(z)}\right)^2 &= \frac{4C^2}{(Cz+D)^2} \end{aligned}$$

lo cual hace claro lo que hay que definir:

Definición. La derivada schwarziana de una función holomorfa f es

$$\mathcal{S}_f = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

11.5. Proposición. (a) $\mathcal{S}_f \equiv 0 \iff f \in \operatorname{Aut}\widehat{\mathbb{C}}$ ó $f \equiv$ constante.
(b) $\mathcal{S}_{g\circ f} = (\mathcal{S}_g \circ f)f'^2 + \mathcal{S}_f$.

Proposición. Sea $\gamma \subseteq \mathbb{R}$ un segmento, f holomorfa en una vecindad de γ. Si $f(\gamma)$ es un arco circular, entonces $\mathcal{S}_f$ es real en γ.

11.6. Volvemos a $f\colon P^+ \to D$ donde D es un polígono circular. Consideremos dos arcos arista consecutivos de D con ángulo > 0. Los círculos que contienen las dos aristas se intersectan en dos puntos, uno es el vértice común. Tomemos $T \in \operatorname{Aut}\widehat{\mathbb{C}}$ que lleve el vértice a 0 y el otro punto al ∞. Así las imágenes de las aristas son segmentos rectos que se intersectan en $t=0$, tienen el ángulo $\pi\alpha_k$. Además, $\mathcal{S}_{T\circ f}=\mathcal{S}_f$.

Hacemos el cálculo de las derivadas Schwarzianas con base en el hecho que $t=(z-z_k)^{\alpha_k}f_1(z)$ con f_1 holomorfa cerca de z_k, $f_1(z_k)\neq 0$. Más que para polígonos circulares, lo siguiente es local, es decir, se puede hacer cada vez que un dominio D tenga en la frontera dos arcos que se intersecan en ángulo $\pi\alpha$, como imagen de z_0, aunque el resto de la frontera sea mala. Se encuentra que

$$\mathcal{S}_{z\mapsto t}=\mathcal{S}_{T\circ f}=\frac{\beta_0-(1/2)\beta_0^2}{(z-z_0)^2}+c_0\frac{\beta_0}{z-z_0}+f_2(z)$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{f_2'(z)}{f_2(z)} &= c_0+c_1(z-z_0)+\cdots\\ &= \frac{(1/2)(1-\alpha_0^2)}{(z-z_0)^2}+\frac{\sigma_0}{z-z_0}+f_3(z)\end{aligned}$$

con f_3 holomorfa, y $\alpha_0,\sigma_0\in\mathbb{R}$.

Para el polígono circular tenemos

$$\mathcal{S}_f=-\frac{1}{2}\sum\left(\frac{1-\alpha_k^2}{(z-z_k)^2}-\frac{\sigma_k}{z-z_k}\right)+\text{holomorfa.}$$

Se puede razonar que por ser real-valuada en $\widehat{\mathbb{R}}$, su parte imaginaria es nula en la frontera, y la mencionada función holomorfa es constante. Luego se pueden deducir unas ecuaciones que satisfacen las constantes σ_k.

11.7. Hay otra formulación que es más elegante, para maps del disco:

<u>Proposición.</u> Sea D un polígono círcular con ángulos internos $\pi\alpha_k$. Entonces la derivada schwarziana de la transformation conforme $f\colon B_1(0)\to D$ tiene la forma

$$z^2\mathcal{S}_f(z)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_kz_kz}{(z-z_k)^2}+ir_k\frac{z+z_k}{z-z_k}\right),$$

donde z_k son los prevértices, $a_k=\frac{1}{2}(1-\alpha_k^2)$, y hay constantes reales $r_k\in\mathbb{R}$ que satisfacen las relaciones

$$\sum_{k=1}^{n}r_k=0,\quad \sum_{k=1}^{n}z_k(a_k+2ir_k)=0.$$

Demostración. Se puede extender f por el Principio de Reflexión a través de cualquier arco z_k, z_{k+1} de $\partial B_1(0)$ entre prevértices consecutivos. Esta extensión está definida en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus$ el resto de $\partial B_1(0)$. La restricción de f al exterior puede reflejarse sobre cualquier otro arco de $\partial B_1(0)$ para obtener una función en $B_1(0)$ que difiere de la f original por dos reflexiones en círculos, o sea por una transformación de Möbius. Así $\mathcal{S}_f$ tiene los mismos valores. Por eso se obtiene una extensión de S_f a $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{z_k\}$. Tiene singularidades aisladas en los z_k y en $z = \infty$.

Del desarrollo $f(z) = c_0 + \dfrac{c_1}{z} + \dfrac{c_2}{z^2} + \cdots$ cerca de $z = \infty$ se calcula que $S_f(z) = O(\dfrac{1}{z^4})$, luego $z^2 \mathcal{S}_f(z)$ tiene una singularidad removible en ∞ (de hecho queda un cero doble). Como las mencionadas reflexiones son $z \mapsto 1/\overline{z}$ en el plano z, y como $f'(0) \neq 0$, se calcula que $z^2 \mathcal{S}_f(z)$ tiene un cero de orden por lo menos 2 en $z = \infty$.

Hemos calulado que la serie de Laurent de S_f cerca de z_k es tiene parte singular

$$\frac{a_k}{(z - z_k)^2} + \frac{b_k}{z - z_k}, \quad b_k \in \mathbb{C},$$

luego $z^2 \mathcal{S}_f(z)$ tiene las singularidades

$$\frac{a_k z_k^2}{(z - z_k)^2} + \frac{c_k}{z - z_k}, \quad c_k \in \mathbb{C}.$$

Por lo tanto

$$z^2 \mathcal{S}_f(z) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{a_k z_k^2}{(z - z_k)^2} + \frac{c_k}{z - z_k} \Big).$$

Sustituir $z_k^2 = z_k z - z_k(z - z_k)$:

$$z^2 \mathcal{S}_f(z) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{a_k z_k z}{(z - z_k)^2} + \frac{c_k - a_k z_k}{z - z_k} \Big).$$

Definir $r_k, s_k \in \mathbb{R}$ por

$$s_k + i r_k = \frac{c_k - a_k z_k}{2 z_k}.$$

Sustituir $\dfrac{2z_k}{z - z_k} = \dfrac{z + z_k}{z - z_k} - 1$:

$$z^2 \mathcal{S}_f(z) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{a_k z_k z}{(z - z_k)^2} + (s_k + i r_k) \frac{z + z_k}{z - z_k} - (s_k + i r_k) \Big).$$

Escribir $z = e^{it}$, $z_k = e^{it_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$. Por trigonometría

$$\operatorname{Im} \frac{z_k z}{(z - z_k)^2} = 0, \qquad \frac{z + z_k}{z - z_k} = -i \cot \frac{t - t_k}{2}$$

para $z \neq z_k$. Como la imagen de cada arco $z_k z_{k+1}$ es circular,

$$0 = \operatorname{Im}\left(z^2 \mathcal{S}_f(z)\right) = -\sum_{k=1}^{n} \Big(s_k \cot \frac{t - t_k}{2} + r_k \Big).$$

Como los t_k son distintos, $s_k = 0$, que da $\sum_{k=1}^{n} r_k = 0$. De esto, se obtiene la fórmula para $\mathcal{S}_f$ (calcular). Como $\mathcal{S}_f(z)$ se anula de orden por lo menos 2 en $z = 0$, se obtiene $\sum_{k=1}^{n} z_k(a_k + 2ir_k) = 0$. □

11.8. Sea φ holomorfa en algún dominio. Entonces dada una solución f de $\mathcal{S}_f = \varphi$, todas las soluciones son $T \circ f$ para $T \in \operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$. Además,

$$f = \frac{y_2}{y_1}$$

donde y_1, y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial ordinaria

$$y'' + \frac{\varphi}{2} y = 0.$$

Cualquier otro par de soluciones linealmente independientes se pueden escribir como $\eta_1 = dy_1 + cy_2$, $\eta_2 = by_1 + ay_2$ $(ad - bc \neq 0)$, y el cociente correspondiente es

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{by_1 + ay_2}{dy_1 + cy_2} = T\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

donde $T(z) = (az + b)/(cz + d)$.