VARIABLE COMPLEJA #7

CONEXIDAD SIMPLE

7.1. X será un espacio topológico arco-conexo y localmente arco-conexo.

Definición. X es simplemente conexo si toda curva cerrada en X es homotópica a un punto relativo a extremos fijos.

Definición. X satisface la Propiedad de Extensión si toda función continua $\phi\colon \partial B_1(0) \to X$ puede extenderse a una función continua $\phi\colon \overline{B_1(0)} \to X$.

Nota. Conexidad simple y Propiedad de Extensión son propiedades topológicas (conservadas por homeomorfismos).

Proposición. X es simplemente conexo $\iff$ X satisface la Propiedad de Extensión.

Proposición. Sea X simplemente conexo. Sean $\gamma_0, \gamma_1\colon [0,1] \to X$ curvas con $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ ("comparten extremos"). Entonces $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ con respecto a extremos fijos.

7.2. Definición. Una 1-forma (diferencial) (real) ω es un par (p, q) de funciones reales (generalmente continuas o aún suaves). Se escribe $\omega = p\,dx + q\,dy$. Dada una función compleja $f = u + iv$, se escribe $f\,dz$ para la 1-forma compleja

$$\begin{aligned} f\,dz &= (u+iv)(dx + i\,dy) = (u+iv)dx + (-v+iu)dy \\ &= (u\,dx - v\,dy) + i(v\,dx + u\,dy) \end{aligned}$$

que es un par de 1-formas reales.

Definición. Dada una función real-valuada u diferenciable, su diferencial es la 1-forma

$$du = u_x\,dx + u_y\,dy.$$

Para $f = u + iv$ compleja, su diferencial es $df = du + i\,dv$.

Definición. $\displaystyle\int_\gamma p\,dx + q\,dy = \int_0^1 (p(\gamma(t))x'(t) + q(\gamma(t))y'(t))\,dt$
donde $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

Definición. La 1-forma $\omega = p\,dx + q\,dy$ se llama cerrada si $q_x - p_y = 0$. La forma ω se llama exacta si existe u tal que $du = \omega$.

Lema. (a) ω exacta $\Rightarrow$ ω cerrada;
(b) ω cerrada en un disco $\Rightarrow$ ω exacta.

Lema. Sea $\omega = du$ en D. Sea $\gamma \subseteq D$, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$. Entonces

$$\int_\gamma \omega = u(b) - u(a).$$

7.3. Proposición. Sean $\gamma_0, \gamma_1 \subseteq D$; sea ω una forma cerrada en D. Si $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ relativo a extremos fijos, entonces $\displaystyle\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$.

Corolario. Sea D un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}$; sea ω una 1-forma cerrada en D. Si $\gamma_0, \gamma_1 \subseteq D$ comparten extremos, entonces $\displaystyle\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$. Si $\gamma \subseteq D$ es una curva cerrada, entonces $\displaystyle\int_\gamma \omega = 0$.

Teorema. Sea D simplemente conexo. Entonces
(a) Todo $u \in \operatorname{Ar} D$ tiene un conjugado armónico v.
(b) Si $f \in \mathcal{H}(D)$ no se anula, entonces existen $g, h \in \mathcal{H}(D)$ tales que $f = e^g$, $f = h^2$.
(c) Si $f \in \mathcal{H}(D)$ entonces existe $F \in \mathcal{H}(D)$ tal que $F' = f$.

VARIABLE COMPLEJA #8

TRANSFORMACIÓN CONFORME

Escribimos $\mathbb{D} = B_1(0)$, $P^+ = \{\operatorname{Im} z > 0\}$.

8.1. Lema. (de Schwarz) Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $f(0) = 0$. Entonces
(i) $(\forall z \in \mathbb{D})\ |f(z)| \le |z|$;
(ii) $|f'(0)| \le 1$.
(iii) Si existe $z_0 \ne 0$ tal que $|f(z_0)| = |z_0|$ o si $|f'(0)| = 1$, entonces $(\exists \alpha \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{D})\ f(z) = e^{i\alpha} z$.

8.2. Definición. Transformación conforme de D_1 en D_2 = función holomorfa y bijectiva de D_1 sobre D_2.

Definición.
$\operatorname{Aut} D = \{f \in \mathcal{H}(D)\colon f$ es una transformación conforme de D en $D\}$.

Proposición. $T \in \operatorname{Aut} \mathbb{D} \;\Rightarrow\;$ existen $a, b \in \mathbb{C}$, $|a|^2 - |b|^2 = 1$,

$$T(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z + \bar{a}}.$$

$T \in \operatorname{Aut} P^+ \;\Rightarrow\;$ existen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$,

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Teorema. (de transformación conforme de Riemann, o Riemann-Koebe)
Sea $D \subsetneqq \mathbb{C}$. Supóngase que todo elemento de $\mathcal{H}(D)$ que no se anula tiene una raíz cuadrada. Entonces existe una transformación conforme $f\colon D \to \mathbb{D}$.

DOMINIOS HOMOLOGICALMENTE NULOS

8.3. Sea $\gamma \subseteq \mathbb{C}$ una curva cerrada, y $z \notin \gamma$.
Definición. El índice de γ alrededor de z es

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Proposición. $n(\gamma, z)$ es un entero, y es constante cuando z varía en una componente conexa de $\mathbb{C} - \gamma$.

8.4. $\gamma \subseteq D$ curva cerrada.
Definición. γ es homológicamente nula en D si $(\forall z \notin D)\; n(\gamma, z) = 0$.
Definición. D es homológicamente nulo si toda curva cerrada en D es homológicamente nula.

Proposición. Simplemente conexo $\;\Rightarrow\;$ homológicamente nulo.

8.5. Sea $\sigma \subseteq \mathbb{C}$ un polígono cerrado (no necesariamente simple) con aristas horizontales y verticales. La colección de rectas que contienen las aristas de σ dividen a $\mathbb{C}$ en rectángulos R_i (y semibandas, agregamos unas rectas para que σ no pase cerca de una semibanda). Sea a_i el centro de R_i. Cualquier segmento τ de σ es una arista común de rectángulos contiguos R_i y R_j; supondremos que R_i está a la izquierda de o arriba de R_j. Orientamos a τ de manera que R_i está a su izquierda y R_j a su derecha.

Sea $c_\sigma(\tau)$ el número neto de veces que σ traza τ, es decir

$$\begin{aligned} c_\sigma(\tau) &= (\#\text{ veces que } \sigma \text{ traza } \tau \text{ positivamente}) \\ &\qquad - (\#\text{ veces que } \sigma \text{ traza } \tau \text{ negativamente}). \end{aligned}$$

Lema. $n(\sigma, a_i) - n(\sigma, a_j) = c_\sigma(\tau)$.

Lema. Supóngase además que $\sigma \subseteq D$. Sea ω una 1-forma en D (no necesariamente cerrada). Entonces

$$\int_\sigma \omega = \sum_{i:\ n(\sigma,a_i)\neq 0} n(\sigma, a_i) \int_{\partial R_i} \omega.$$

Lema. Supóngase además que $\sigma \sim 0$ en D y que ω es una forma cerrada. Entonces $\int_\sigma \omega = 0$.

Teorema. D es simplemente conexo $\iff$ D es homológicamente nulo.

Teorema. D es homológicamente nulo $\iff$ $\widehat{\mathbb{C}} - D$ es conexo.

D satisface Propiedad de la Extension	$\Leftrightarrow$	D simplemente conexo	$\Rightarrow$	$\int_\gamma \omega = 0$ γ, ω cerradas	$\Rightarrow$	$f\colon D \to \mathbb{C} - \{0\}$ $\exists\ g = \sqrt{f}$	$\Rightarrow$	D biholomorfo a $\mathbb{D}$
				$\Updownarrow$				
				D homológicamente nulo				
				$\Updownarrow$				
				$\widehat{\mathbb{C}} - D$ conexo				