VARIABLE COMPLEJA $\#3$

PRODUCTOS INFINITOS, FACTORIZACION DE WEIERSTRASS

3.1. El principio general a aplicarse será que cada concepto relacionado con productos infinitos puede pensarse como si fuera la "exponencial" del concepto correspondiente para sumatorias, pues

$$\prod z_j = e^{\Sigma \log z_j} = e^{\Sigma \zeta_j}.$$

En un producto queremos admitir la posibilidad de $z_j = 0$, entonces hay que pensar en sumandos $\zeta_j = -\infty$ en una sumatoria. Suponiendo que hay un número finito de sumandos $-\infty$, diremos que la sumatoria converge a $-\infty$ cuando los términos distintos del $-\infty$ forman una serie convergente. Esto es diferente de una suma como $\sum_{j=1}^{\infty}(-1)$ que diverge a $-\infty$.

Definición. Sean $z_j \in \mathbb{C}$. Decimos que $\prod z_j$ converge si (i) sólo un número finito de los z_j son cero: hay N tal que $j \geq N \;\Rightarrow\; z_j \neq 0$, y (ii) $\displaystyle\prod_{j=N}^{n} z_j$ tiende a un límite no-cero cuando $n \to \infty$.

(pensar qué correspondería en las sumatorias si el límite en (ii) fuera cero)

Ejemplo. $\displaystyle\prod_{j=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{j})$ diverge a cero.

3.2. Proposición. $\prod z_j$ converge $\;\Rightarrow\;$ $z_j \to 1$ cuando $j \to \infty$.

Proposición. Sean $1 + a_j = z_j \notin (-\infty, 0]$. Entonces $\prod(1 + a_j)$ converge $\iff \sum \log(1 + a_j)$ converge, donde log significa la rama principal, $|\arg \log z\,| < \pi$.

3.3. Ejemplo. $\prod(-1)^j$ no converge, pero $\prod |(-1)^j|$ sí converge!

Definición. Decimos que $\prod(1+a_j)$ converge absolutamente cuando $\sum \log(1+a_j)$ converge absolutamente.

Proposición. $\prod(1+a_j)$ converge absolutamente $\iff$ $\sum a_j$ converge absolutamente.

FACTORIZACION DE WEIERSTRASS

Aunque la representación de una función holomorfa $f(z)=\sum_0^\infty c_j z^j$ es útil para muchas cosas, da poca información sobre los ceros de f. Para polinomios, tenemos $p(z)=(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)$ pero por lo que ya sabemos de productos, sería mejor escribir

$$c(1-\frac{z}{a_1})(1-\frac{z}{a_2})\cdots$$

Igual que con el estudio de las fracciones parciales, no podemos esperar que $\prod(1-z/a_j)$ converja siempre.

Ejemplo. sen πz debiera tener factores $1-z/j$ pero $\prod(1-z/j)$ diverge cuando $z\neq 0$.

3.4. Se ve que
$\prod(1-\frac{z}{a_j})$ converge absolutamente, y uniformemente en compactos
$\iff \sum \frac{1}{a_j}$ converge absolutamente.
Esto pasará cuando hay "pocos" ceros (pensar en $a_j=j^2$ o $a_j=2^j$). La rapidez de que los ceros tienden al infinito es una forma de medir el "tamaño" de una función entera.

Definición. Sean $a_j\to\infty$ (valores no necesariamente distintos). El exponente de convergencia de la sucesión $\{a_j\}$ es el mínimo entero μ tal que

$$\sum \frac{1}{|a_j|^{\mu+1}}<\infty.$$

Otra medida de una función entera es su tasa de crecimiento. Suponiendo que

$$|f(z)|\le e^{a|z|^\lambda}$$

para $|z|$ grande, entonces $\log|f| \leq a|z|^\lambda$; $\log\log|f| \leq \log a + \lambda \log|z|$;

$$\frac{\log\log|f|}{\log|z|} \leq \lambda + \frac{\log a}{\log|z|} \leq \lambda + \epsilon$$

para $|z|$ grande.

Definición. El orden de una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ es el mínimo número λ tal que $(\forall \epsilon > 0)(\forall z \text{ grande})$

$$|f(z)| \leq e^{|z|^{\lambda+\epsilon}}.$$

Si no existe tal número, el orden es $\lambda = \infty$. Tenemos

$$\lambda = \limsup_{z\to\infty} \frac{\log\log|f(z)|}{\log|z|}.$$

Cuando $\lambda < \infty$, el tipo de f es el mínimo a tal que $(\forall \epsilon > 0)(\forall z \text{ grande})$

$$|f(z)| \leq e^{(a+\epsilon)|z|^\lambda}.$$

Ejemplo. $\operatorname{sen} z$ tiene orden 1; $\operatorname{sen} 2z$ tiene orden 1; $\operatorname{sen}^2 z$ tiene orden 1; $\operatorname{sen} z^2$ tiene orden 2.

3.5. Definición. Un producto canónico para la sucesión $\{a_j\}$ es cualquiera de la forma

$$\prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) e^{\frac{z}{a_j} + \frac{1}{2}(\frac{z}{a_j})^2 + \frac{1}{3}(\frac{z}{a_j})^3 + \cdots + \frac{1}{m_j}(\frac{z}{a_j})^{m_j}}.$$

Depende de la elección de los grados m_j de los polinomios $p_{m_j}(z/a_j)$. Un factor canónico es

$$\begin{aligned} E_0(u) &= 1 - u; \\ E_m(u) &= (1-u)e^{p_m(u)} = (1-u)e^{u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + \cdots + \frac{1}{m}u^m}, \quad m \geq 1. \end{aligned}$$

Teorema. (Factorización de Weierstrass) (a) Sea $a_j \to \infty$. Entonces existe una función entera cuyos ceros son precisamente estos valores a_j (repetidos según su multiplicidad).
(b) Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Entonces existen enteros m, m_j y una función entera g tales que

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{j=m+1}^\infty \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) e^{\frac{z}{a_j} + \frac{1}{2}(\frac{z}{a_j})^2 + \cdots + \frac{1}{m_j}(\frac{z}{a_j})^{m_j}}.$$

Corolario. Sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Entonces existen $g_1, g_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tales que $f = g_1/g_2$.

Ejemplo. $\cos \pi z \quad = \prod_{m \text{ impar}} (1 - \frac{2z}{m}) e^{2z/m}$

Nota. Hay resultados similares para $\mathcal{H}(D)$ y $\mathcal{M}(D)$ para cualquier dominio $D \subseteq \mathbb{C}$.

Definición. Sea $a_j \to \infty$ y supóngase que $\{a_j\}$ tiene exponente de convergencia finito μ. Entonces decimos que el producto canónico para $\{a_j\}$ es $\prod E_\mu(z/a_j)$.

Definición. Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y si los ceros $\{a_j\}$ de f tienen exponente de convergencia finito y si la función $g(z)$ en la factorización de Weierstrass es un polinomio, entonces decimos que el género de f es

$$\mu = \min(\text{ exp. de conv. de } \{a_j\}, \ \text{grad}(g) \ ).$$

Teorema. (de Hadamard) Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ de género μ y orden λ. Entonces

$$\mu \leq \lambda \leq \mu + 1.$$

(se omite la demostración)

VARIABLE COMPLEJA $\#4$

FUNCIONES ARMÓNICAS

4.1. Sea $V = p + iq$ la velocidad de un fluido en alguna región del plano. Algunas propiedades físicas del fluido corresponden a propiedades matemáticas de V:

Ejemplo. Dado un (sub)dominio de Jordan con frontera una curva suave parametrizada por $z(t) = x(t) + iy(t)$, se calcula la cantidad neta de fluido que entra como sigue: el vector normal hacia dentro es $d\vec{n} = (-dy, dx)$, luego el flujo (neto) a través de la frontera es

$$\oint \vec{V} \cdot d\vec{n} = \oint (p, q) \cdot (-dy, dx) = \oint q \, dx - p \, dy.$$

Decimos que el flujo es incompresible si el flujo es cero para cada subdominio de Jordan.

Ejemplo. La circulación alrededor de una curva cerrada es

$$\oint \vec{V} \cdot dz = \oint (p,q) \cdot (dx, dy) = \oint p\,dx + q\,dy$$

y el flujo se llama irrotacional si la circulación siempre es cero.

4.2. Fijemos (x_0, y_0). Si V es incompresible, entonces la cantidad

$$\psi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} q\,dx - p\,dy$$

está bien definida en un área simplemente conexa (no depende del camino de integración); se llama el *potencial de velocidad.* Si V es irrotacional, entonces

$$\phi(x,y) = -\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} p\,dx + q\,dy$$

está bien definida; se llama el *potencial del fluido.*

Supongamos que V es tanto irrotacional como incompresible. Entonces tenemos $\phi_x = -p = \psi_y$; $\phi_y = -q = -\psi_x$. Así la función

$$U = \phi + i\psi = \text{ (potencial del fluido) } + i\text{(potencial de velocidad)}$$

es holomorfa, por lo que la velocidad $V = -\overline{U'}$ es antiholomorfa. Tanto ϕ como ψ son armónicas.

4.3. El gradiente

$$\nabla\phi = (\phi_x, \phi_y) = (-p, -q) = -V$$

es un vector paralelo a V y perpendicular a las curvas de nivel $\phi =$ const:

$$\phi(x(t), y(t)) = c \;\Rightarrow\; \phi_x x' + \phi_y y' = 0 \;\Rightarrow\; \nabla\phi \perp z'(t)$$

donde $z'(t)$ es el tangente a la curva de nivel. Por eso las curvas de nivel de ϕ son perpendiculares a V y también perpendiculares a las curvas de nivel de ψ.

Teorema. Un fluido incompresible e irrotacional fluye a lo largo de las curvas de nivel de su potencial de velocidad ψ.

4.4. Proposición. Sea u armónica en D ($u \in \operatorname{Ar} D$) y sea $f\colon D' \to D$ holomorfa. Entonces $u \circ f$ es armónica en D'. Además, las curvas de nivel de $u \circ f$ son f^{-1}(curvas de nivel de u).

Esto permite convertir un problema de potencial en un dominio a un problema de potencial en otro dominio.

Problema de Dirichlet: $\begin{cases} \Delta u &= 0 \text{ en } D, \\ u &= h \text{ en } \partial D. \end{cases}$

Problema de Neumann: $\begin{cases} \Delta u &= 0 \text{ en } D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} &= h \text{ en } \partial D. \end{cases}$

Operador Dirichlet-Neumann: Dada h en ∂D, resolver el problema de Dirichlet, lo cual da una funcion u en el interior. Tomar la derivada normal $\partial u/\partial \vec{n}$, en los puntos de ∂D.

Operador de Hilbert: Dada h en ∂D, resolver el problema de Dirichlet, lo cual da una funcion u en el interior. Tomar un conjugado armónico v para u (quizás normalizado por $v(0) = 0$ o algo similar) y restringir a ∂D.

(Se usan los mismos nombres para los conceptos análogos correspondientes a otros operadores en lugar de Δ.)

4.5. PROPIEDADES DE FUNCIONES ARMÓNICAS

Coordenadas Polares. $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$.

$$\frac{\partial\partial(x,y)}{\partial\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r & -y \\ y/r & x \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\partial(r,\theta)}{\partial\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} & -\frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = r(ru_r)_r + u_{\theta\theta}$$

Por eso $u_1(z) = \log|z| = \log r$ y $u_2(z) = \arg z = \theta$ son funciones armónicas de (x,y).

4.6. Teorema. (Propiedad del Valor Medio PVM) Sea $u \in \operatorname{Ar} D$. Entonces cada vez que $\overline{B_r(z_0)} \subseteq D$ se tiene

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Definición. Decimos que $u \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ satisface el PVM si $(\forall z_0 \in D)(\forall r > 0)\ \overline{B_r(z_0)} \subseteq D \ \Rightarrow\ u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$.
Decimos que $u \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ satisface el PVM en pequeños radios si $(\forall z_0 \in D)(\exists r_0 > 0)(\forall r < r_0)\ \ldots$

4.7. Teorema. (Principio del Máximo PMax) sea $u \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ que satisface la PVM en pequeños radios en D. Si u no es idénticamente constante, entonces no hay punto de D en que u tome su valor máximo.

Nota. u satisface PVM en pequeños radios $\Rightarrow$ $-u$ satisface PVM en pequeños radios $\Rightarrow$ $-u$ no toma máximo si no es constante $\Rightarrow$ u no toma mínimo si no es constante. ("Principio del Mínimo")

Corolario. Sea D un dominio acotado, $u \in \mathcal{C}(\operatorname{cerr} D, \mathbb{R})$, $u|_D$ armónica, $u|_{\partial D} = 0$. Entonces $u = 0$.

Corolario. Una función armónica en un dominio acotado que tenga una extensión continua a la frontera está determinada por estos valores en la frontera.

PROBLEMA DE DIRICHLET

4.8. Fijemos $h\colon \partial D \to \mathbb{R}$ continua. ¿Existe $u \in \operatorname{Ar} D$ con extensión continua a la frontera $u|_{\partial D} = h$? (Cuando D no es acotado, se podrá poner una condición de continuidad en el ∞.)

Definición. D es un dominio de Dirichlet si para toda $h \in \mathcal{C}(\partial D, \mathbb{R})$ la respuesta a la pregunta es "sí".

Ejemplo. $D = \{0 < z < 1\}$. Definamos $h(0) = 0$, $h(z) = 1$ para $|z| = 1$. Veremos que si existiera una solución al problema de Dirichlet, tendría que ser armónica en $z = 0$ también (es decir, armónica en $B_1(0)$), lo cual contradiría el Principio del Máximo. Así que D no es un dominio de Dirichlet.

4.9. La solución al Problema de Dirichlet *para un disco* es fácil y se llama la fórmula de Poisson. Consideremos u armónica en $B_{R+\epsilon}(0)$ e investiguemos la relación entre sus valores en $\partial B_R(0)$ y en un punto $p \in B_R(0)$. La transformación de Möbius

$$z = T(w) = \frac{R(w + p/R)}{(\overline{p}/R)w + 1} = \frac{R(Rw + p)}{\overline{p}w + R}$$

lleva $\{|w| < 1\}$ a $\{|z| < R\}$ con $0 \mapsto p$. La función $\widetilde{u} = u \circ T$, o sea $\widetilde{u}(w) = u(z)$, es armónica en $B_1(0)$ y por la PVM

$$u(p) = \widetilde{u}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widetilde{u}(e^{i\phi})\, d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\frac{d\phi}{d\theta}\, d\theta.$$

El núcleo de Poisson se define como $(1/2\pi)(d\phi/d\theta)$. Para calcularlo, veamos la inversa

$$e^{i\phi} = w = \frac{Rz - Rp}{-\overline{p}z + R^2}$$

donde $z = Re^{i\theta}$. Luego $dw = iw\, d\phi$, $dz = iz\, d\theta$, $d\phi/d\theta = (dw/dz)(z/w)$,

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi}{d\theta} &= \frac{R(R^2 - |p|^2)}{(-\overline{p}z + R^2)^2} \cdot z \cdot \frac{-\overline{p}z + R^2}{R(z - p)} \\
&= \frac{(R^2 - |p|^2)z}{(-\overline{p}z + \overline{z}z)(z - p)} \\
&= \frac{R^2 - |p|^2}{|z - p|^2}.
\end{aligned}$$

Esto se puede expresar de muchas formas. La fórmula

$$\frac{z + p}{z - p} = \frac{(z + p)(\overline{z} - \overline{p})}{(z - p)(\overline{z} - \overline{p})}$$

nos da

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{R^2 - |p|^2}{|z - p|^2} = \operatorname{Re}\frac{z + p}{z - p}.$$

<u>Teorema.</u> Sea $u \in \mathcal{C}(\overline{B_R(0)}, \mathbb{R})$, u armónica en $B_R(0)$. Sea $p = R_0 e^{i\theta_0}$ donde $0 \leq R_0 < R$. Entonces

$$\begin{aligned}
u(p) = u(R_0 e^{i\theta_0}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{R^2 - R_0^2}{|Re^{i\theta} - R_0 e^{i\theta_0}|^2}\, u(Re^{i\theta})\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{R^2 - R_0^2}{R^2 - 2RR_0\cos(\theta - \theta_0) + R_0^2}\, u(Re^{i\theta})\, d\theta.
\end{aligned}$$

Definición. Núcleo de Poisson

$$K(z,\theta) = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} = \frac{1}{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}$$

para $|z|<1$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

4.10. Sea $h \in \mathbb{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$. Definición. La integral de Poisson de h es

$$P_h(z) = \int_0^{2\pi} K(z,\theta)h(\theta)\,d\theta$$

para $|z|<1$.

Se tiene P: $h \mapsto P_h$: $\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R}) \to \operatorname{Ar}(B_1(0))$. También h podría ser cualquier función integrable. Para el disco $B_R(z_0)$ hay un kernel $K((z-z_0)/R,\theta)$ dando un operador $P_{z_0,R}(h)$.

Proposición. (1) P es un operador lineal.
(2) P es un operador positivo.
(3) P_c es constante cuando c es constante.
(4) Si $c_1 \le h(\theta) \le c_2$ para todo θ, entonces $c_1 \le P_h(z) \le c_2$ para todo z.

4.11. Proposición. (Schwarz) Sea $h : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ continua por pedazos (o integrable+acotada) y sea h continua en θ_0. Entonces

$$\lim_{\substack{z\to e^{i\theta_0}\\ |z|<1}} P_h(z) = h(\theta_0).$$

4.12. Teorema. u satisface la PVM en pequeños radios $\Rightarrow$ u es armónica.

Proposición. $\operatorname{Ar} D$ es cerrado en $\mathcal{C}(D,\mathbb{R})$.

4.13. Proposición. (Desigualdad de Harnack) Sea $u \in \operatorname{Ar} B_R(0)$ con $u \ge 0$ Entonces para cada $z \in B_R(0)$ se tiene

$$\frac{R-|z|}{R+|z|}u(0) \le u(z) \le \frac{R+|z|}{R-|z|}u(0).$$

Proposición. (Teorema de Liouville) Sea $u \in \operatorname{Ar}\mathbb{C}$, u acotada. Entonces u es constante.

Proposición. (Principio de Harnack) Sea $\{u_n\} \subseteq \mathrm{Ar}\, D$ con $u_n \leq u_{n+1}$. Entonces o bien

(a) $u_n \to \infty$ uniformemente en compactos de D, o bien

(b) existe $u \in \mathrm{Ar}\, D$ tal que $u_n \to u$ en $\mathrm{Ar}\, D$.