

VARIABLE COMPLEJA II

Lista 7

(entregar: 5 de diciembre)

Se define la *derivada Schwarziana* de f , $\mathcal{S}_f = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$.

1. Sea $f \in \mathcal{H}(D)$ no constante. Demostrar que f es restricción de un elemento de $\text{Aut } \widehat{\mathbb{C}}$ (=grupo de Möbius) si y sólo si $\mathcal{S}_f \equiv 0$.
2. Sea $f \in \mathcal{H}(D)$, $g \in \mathcal{H}(f(D))$. Demostrar: $\mathcal{S}_{g \circ f} = (\mathcal{S}_g \circ f)(f'^2) + \mathcal{S}_f$.
3. Sea $\gamma \subseteq \mathbb{R}$ un segmento, f holomorfa en una vecindad de γ . Supóngase que $f(\gamma)$ es un arco circular. Demostrar: \mathcal{S}_f es real en γ .
4. Sea $\varphi \in H(D)$ donde D es un dominio en \mathbb{C} . Sean $y_1, y_2 \in H(D)$ soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial ordinaria

$$y'' + \frac{1}{2}\varphi y = 0.$$

Demostrar que $\mathcal{S}_f = \varphi$.

5. Resolver las siguientes ecuaciones para f .

(a) $\mathcal{S}_f(z) = -1/2$;

(b) $\mathcal{S}_f(z) = \frac{-3}{2(z-1)^2}$

(c) $\mathcal{S}_f(z) = \frac{2}{(z^2-1)^2}$;