

# VARIABLE COMPLEJA II

## Lista 5

(entregar: 10 de noviembre [pueden consultar textos, internet, etc.] )

Para  $z$  en el semiplano de la derecha  $\{\operatorname{Re} z > 0\}$  se define

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

1. Demostrar (a) que cuando  $\{\operatorname{Re} z > 1\}$ , la integral  $\Gamma(z)$  ( $= \lim_{M,N \rightarrow \infty} \int_{1/M}^N \dots$ ) existe y  $\Gamma$  es holomorfa en ese semiplano; y (b) que  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  para  $\operatorname{Re} z > 0$ ; deducir (c) que  $\Gamma$  se extiende a una función meromorfa en todo  $\mathbb{C}$ , con polos simples en  $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ .
2. Demostrar la descomposición como suma de partes singulares más una función entera,  $\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ . (Sugerencia: substituir la serie de potencias de  $e^{-t}$  dentro de  $\int_0^1 \cdot$ )

$$\text{Sea } \Gamma_n(z) = \int_0^n t^{z-1} (1 - \frac{t}{n})^n dt = n^z \int_0^1 s^{z-1} (1-s)^n ds \text{ para } \operatorname{Re} z > 0.$$

3. (a) Demostrar que  $\frac{1}{\Gamma_n(z)} = n^{-z} z \prod_{k=1}^n (1 + \frac{z}{k})$  (producto finito).  
 (b) Deducir que  $e^{-z(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n)} \frac{1}{\Gamma_n(z)} = z \prod_{k=1}^n (1 + \frac{z}{k}) e^{-\frac{z}{k}}$ .

La constante de Euler es  $\gamma = \lim(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n)$ .

4. Sea  $G(z) = z \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{k}) e^{-\frac{z}{k}}$ .

Demostrar  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma_n(z)} = e^{\gamma z} G(z)$  para  $z \notin \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ .

5. Demostrar  $\Gamma_n(z) \rightarrow \Gamma(z)$ , luego tenemos una función entera factorizada

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z} z \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{k}) e^{-\frac{z}{k}}.$$

6. Demostrar  $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ .