VARIABLE COMPLEJA II
Lista 4

(entregar: 18 de octubre)

1. Expresar el operador laplaciano $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ en términos de coordenadas elípticas (ξ, η) definidas por

$$\begin{aligned} x &= \cosh \xi \cos \eta, \\ y &= \sinh \xi \operatorname{sen} \eta. \end{aligned}$$

2. Demostrar que $\mathrm{Ar}(D)$ es cerrado en $\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$.

3. Demostrar el Principio de Harnack: Sean $\{u_n\} \subseteq \mathrm{Ar}(D)$, con $u_n(z) \leq u_{n+1}(z)$ para $z \in D$. Entonces, o bien (a) $u_n \to \infty$ uniformemente en compactos de D, o bien (b) $\{u_n\}$ converge en $\mathrm{Ar}(D)$.

4. Encontrar una $u \in \mathrm{Ar}\, P^+$ (donde $P^+ = \{\mathrm{Im}\ z > 0\}$) tal que u es acotada y tiene los siguientes valores en la frontera:

$$\begin{aligned} u(x) &= -1 && \text{si } x < -1, \\ u(x) &= 0 && \text{si } -1 < x < 1, \\ u(x) &= 1 && \text{si } 1 < x. \end{aligned}$$

(Sugerencia: observar el comportamiento de $\arg z$ en P^+. Recorrer la variable y hacer combinaciones.)

5. Encontrar una $u \in \mathrm{Ar}\,(B_1(0))$ acotada tal que u tiene valores límites

$$\begin{aligned} u(e^{i\theta}) &= 1, && 0 < \theta < \pi, \\ u(e^{i\theta}) &= -1, && \pi < \theta < 2\pi. \end{aligned}$$

(Sugerencia: usar una transformación conforme a una banda horizontal.)