

## VARIABLE COMPLEJA II

### Lista 3

(entregar: 18 de octubre)

1. Evaluar la sumatoria  $\sum_1^\infty n^{-4}$ , empleando la descomposición en fracciones parciales de  $\cot \pi z$ .

2. Sea  $g_2(z) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} (m + nz)^{-4}$ .

(a) Demostrar que la serie doble converge a una función holomorfa en el semiplano  $\{z: \text{Im } z > 0\}$ . (Recordar que las series dobles se pueden convertir en series simples, por ejemplo tomando  $\{m + n \leq N\}$  e indexando con  $N$ .)

(b) Sea  $T(z) = (az + b)/(cz + d)$  (donde  $a, b, c, d$  enteros,  $ad - bc = 1$ ). Demostrar:

$$g_2(T(z))T'(z)^2 = g_2(z).$$

3. Demostrar:  $\prod_{k=0}^\infty (1 + \frac{1}{2^{2^k}}) = 2$ .

4. ¿Cuáles de estos productos convergen/divergen? ¿absolutamente?  
¿para cuáles  $z$  (en su caso)?

(a)  $\prod_{k=1}^\infty (1 + (-1)^k k^{-1/3})$

(b)  $\prod_{k=1}^\infty (1 + a_k)$ , donde  
 $a_k = 1/\sqrt{k}$  para  $k$  impar,  $a_k = -1/\sqrt{k} + 1/k$  para  $k$  par.

(c)  $\prod_{k=1}^\infty (1 + \frac{z^2}{k^2})$

(d)  $(1 - \frac{z}{1})(1 + \frac{z}{1})(1 - \frac{z}{2})(1 + \frac{z}{2})(1 - \frac{z}{3}) \cdots$