VARIABLE COMPLEJA II
Lista 2

(entregar: 22 de septiembre)

1. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(D)$ una familia normal. Sea $\epsilon > 0$. Demostrar que existe $c > 0$ tal que
$$\{cf\colon\ f \in \mathcal{F}\} \ \subseteq\ \{f \in \mathcal{H}(D)\colon\ \rho(0, f) < \epsilon\}.$$

2. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(D)$ una familia normal. Demostrar que la familia
$$\mathcal{F}' = \{f'\colon\ f \in \mathcal{F}\}$$
también es una familia normal.

3. Sea $f, f_n \in \mathcal{H}(D)$ donde cada f_n es inyectiva. Supóngase que $f_n \to f$ en $\mathcal{H}(D)$. Demostrar: f es inyectiva o es constante.

4. Se abrevia $(a)_k = a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1)$ para $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^+$ (de manera que $(1)_k = k!$). Sea $a > 0$. Demostrar que $(1+z)^a = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a-k+1)_k}{k!}\, z^k$ donde la serie converge uniformemente en compactos de $|z| < 1$.

5. Sea $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^{2^j}$. Demostrar que f es holomorfa en $B_1(0)$ y que para cualquier $z_0 \in \partial B_1(0)$, f no tiene límite as $z \to z_0$, $z \in B_1(0)$.

6. Leer `http://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/rjchapma/etc/zeta2.pdf` y entender por lo menos las pruebas 1,2,3,6,8,9. (No entregar.)