VARIABLE COMPLEJA II
Lista 1

(entregar: 10 de septiembre)

Notación: D = dominio en $\mathbb{C}$; $\mathcal{C}(D,\mathbb{C}) = \{$funciones continuas de D en $\mathbb{C}\}$;
$f_n \to f$ en $\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$ significa $(\forall K \subseteq D,\ K$ compacto$)$ $f_n|_K \to f|_K$ uniformemente;
$\mathcal{H}(D) = \{$holomorfas en $D\}$.

1. Sea $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de clase C^2, con $\alpha(0) = 0$, $\alpha' > 0$, $\alpha'' < 0$. Demostrar: $\alpha(s+t) \leq \alpha(s) + \alpha(t)$ para $s, t \geq 0$.

2. Demostrar: El espacio métrico $(\mathcal{C}(D,\mathbb{C}), \rho)$ es *completo*.

3. Sea $\Delta = B_1(0) = \{z\colon\ |z| < 1\} \subseteq \mathbb{C}$. Encontrar sucesiones $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ en $\mathcal{C}(\Delta,\mathbb{C})$ tales que
(a) $f_n \to 0$ puntualmente, pero $f_n \not\to 0$ en $\mathcal{C}(\Delta,\mathbb{C})$;
(b) $g_n \to 0$ puntualmente, pero $\iint_\Delta |g_n|\, dx\, dy \not\to 0$.

4. Sea (i) $f_n \to f$ en $\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$ cuando $n \to \infty$ y sea (ii) $z_n \to z \in D$ cuando $n \to \infty$. Demostrar: $f_n(z_n) \to f(z)$ cuando $n \to \infty$.

5. Sean $f, f_n \in \mathcal{H}(D)$. Supóngase que para toda curva cerrada y suave por pedazos $\gamma \subseteq D$, se tiene $f_n \to f$ uniformemente en γ. Demostrar: $f_n \to f$ en $\mathcal{H}(D)$.

6. Sea $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ para z en $D_0 = \{z\colon\ \mathrm{Re}\ z > 1\}$.
(a) Mostrar que $\zeta(z)$ está bien definida (función ζ de Riemann).
(b) Mostrar que ζ es una función holomorfa.
(c) Calcular la derivada $\zeta'(z)$.