VARIABLE COMPLEJA II
EXAMEN 2

1. Definir una función meromorfa en $\mathbb{C}$ que tenga los siguientes polos y ceros (y ningún otro):

   un cero de orden n en cada punto $z = n$, $n = 1, 2, 3 \ldots$;
   un polo de orden 2 en cada punto $z = n^2 i$, $n = 1, 2, 3 \ldots$

   ("Definir" significa que sería posible en principio calcular el valor de la función propuesta en cualquier punto dado a cualquier precisión.)

   Solución. Sean
   $$a_j = 1,\ 2, 2,\ 3, 3, 3,\ 4, 4, 4, 4,\ \ldots$$
   y $m_j = j - 1$. Entonces por el Teorema de Factorización de Weierstrass el producto
   $$f_1(z) = \prod_{j=1}^{\infty}(1 - \frac{z}{a_j})e^{\frac{z}{a_j} + \frac{1}{2}(\frac{z}{a_j})^2 + \frac{1}{3}(\frac{z}{a_j})^3 + \cdots + \frac{1}{m_j}(\frac{z}{a_j})^{m_j}}$$
   converge, es una función entera y tiene un cero de orden n en $n = 1, 2, 3, \ldots$ De la misma manera con $b_j = i, i, 4i, 4i, 9i, 9i, \ldots$,
   $$f_2(z) = \prod_{j=1}^{\infty}(1 - \frac{z}{b_j})e^{\frac{z}{b_j}} = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - \frac{z}{k})^2 e^{\frac{2z}{k}}$$
   es entera con un cero de orden 2 en $i, 2^2 i, 3^2 i, \ldots$. La función deseada es $\dfrac{f_1}{f_2}$.

2. Sea $D_1 = \{z\colon\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$ el semiplano por la derecha. Encontrar una función armónica en D_1 que es constante en ∂D_1 pero que no es acotada en D_1.

   Solución. $u(z) = \mathrm{Re}\, z$.

3. Sea $D_2 \subseteq \mathbb{C}$ cualquier dominio. Sean $z_1, z_2 \in D_2$. Demostrar que con estos datos existe una constante c tal que para toda función armónica u positiva en D_2, se cumple la desigualdad
   $$\frac{1}{c}u(z_2) \le u(z_1) \le cu(z_2).$$

Solución. Puesto que hay una curva en D que une z_1 con z_2, hay puntos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in D_2$ con $a_1 = z_1$, $a_n = z_2$, and un $r > 0$ tales que $a_{j+1} \in B_r(z_j)$ y $B_{2r}(z_j) \subseteq D$. Por la desigualdad de Harnack, cualquier $u \in \mathrm{Ar}\,(D_2)$ positiva satisface

$$u(a_{j+1}) \leq \frac{2r + |a_{j+1} - a_j|}{2r - |a_{j+1} - a_j|} u(a_j) < 3u(a_j).$$

Por inducción, $u(z_1) \leq 3^n u(z_2)$. Intercambiando los papeles de z_1, z_2 nos da $(1/3^n)u(z_1) \leq u(z_2)$.

4. Sea v una función continua en un dominio $D_3 \subseteq \mathbb{C}$ tal que para toda función armónica en un subdominio $D \subseteq D_3$, la diferencia $v|_D - u$ satisface el Principio del Máximo en D. Demostrar que v es subarmónica.

   Solución. (Consultar notas)