Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de Admisión
Primero de noviembre de 2024 (10:00 a 13:00 hrs.)

Resuelva al menos 3 problemas de cada tema.

Justifique todas sus respuestas.

I. Álgebra Lineal

1. Defina la matriz
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$
Considere el polinomio $p(x) = (x+1)(x+i)(x+2)$. Calcule el determinante de la matriz $p(A)$.

2. En el espacio $X = l_2(\mathbb{N})$ considere $L : X \to X$ el operador tal que
$$T(\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}) = (\{x_{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}).$$
Cuáles son los valores propios de T?

3. Son los vectores $(2,3,1), (1,-1,2), (7,3,8)$ linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$?

4. Para cualquier función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable defina el operador T como
$$Tf(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} & x \neq 3 \\ f'(3) & x = 3 \end{cases}$$
Demuestre que Tp es un polinomio cuando p es un polinomio. Explique si T es un operador lineal en el espacio de polinomios.

5. En el espacio de matrices de orden n con entradas reales, demuestre que $\langle A, B\rangle = \text{Traza}(AB^T)$ define un producto interno, donde B^T es la traspuesta de B.

II. Cálculo

6. Determine si la siguiente sucesión converge o diverge:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

7. Diga si el siguiente límite existe,

$$\lim_{x \to 0} x \sin(1/x^2).$$

8. Suponga que $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ es continua. Demuestre que es uniformemente continua.

9. Sea $\{a_n\}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha > 0$ y considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n}$. Determine para que valores $z \in \mathbb{C}$ la serie converge.

10. Sea $F(x) = \int_{x^2}^{x} \sqrt{1 + t^2} dt$ con $x \in [0, 1]$. Calcule $F'(x)$.