Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

11 de Febrero de 2002

1. Algebra lineal

1.1 ¿Para que valores de a el siguiente sistema:

(a) no tiene soluciones,

(b) tiene exactamente una solución,

(c) tiene una infinidad de soluciones?

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$$

1.2 Sea $M_n(\mathbb{R})$ es espacio vectorial de todas las matrices $n \times n$ raeles y sea V el subespacio de $M_n(\mathbb{R})$ que consiste de todas las matrices de traza cero.

(a) Calcule la dimensión de V.

(b) Encuentre una base para V.

1.3 Sean $v_1 = (1, -4, 7), v_2 = (2, 5, -8)$ y $v_3 = (3, 6, 9)$ tres vectores en $\mathbb{R}^3$. Use el proceso de Gram-Schimidt para encontrar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, a aprtir de v_1, v_2 y v_3.

2. Cálculo

2.1 Considere la función $F : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$F(x) = \int_0^x t^2 e^{t^2} dt$$

(a) Encuentre los puntos de continuidad de F.

(b) ¿En cuales de ellos es F diferenciable?

(c) Calcule $F'(2002)$.

2.2 Sea x un real positivo distinto de 1 y P un número primo. Diga en que casos la siguiente serie es convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^{np}}.$$

2.3 Sea $K \in \mathbb{R}^3$ el elipsoide dado por la ecuación $\frac{x2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, donde $a, b, c > 0$. Dado un punto arbitrar io $(x, y, z) \in K$, en el primer octante, considere el paralelepípedo de vertices $(\pm x, \pm y, \pm z)$ inscrito en K, con volumen $V = 8xyz$. Encuentre le máximo valor posible de V. Sugerencia: V es máximo si y sólo si V^2 es máximo.

3. Problemas opcionales

3.1 Para $n \geq 1$, sea $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| \leq 1\}$ el disco unitario en $\mathbb{R}^n$ y denotemos por S^{n-1} a su frontera ∂D^n. Demuestre que $D^n/\partial D^n$ es homeomorfo a S^n.

3.2 De un ejemplo de un grupo G infinito pero tal que todos sus elementos sean de torsión.

3.3 Encuentre la imagen de la recta real bajo la transformación $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \frac{z-i}{z=i}$.