

Examen de Admisión
18 de septiembre de 2026
(3 horas)

Resuelva correctamente al menos 3 problemas completos de cada tema.

Justifique todas sus respuestas.

I. Álgebra Lineal

1. Para $a \in \mathbb{R}$, considere los vectores

$$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (1, a, a^2), \quad v_3 = (1, a^2, a^4).$$

Determine para qué valores de a son linealmente independientes. En los demás casos, determine la dimensión del espacio que generan.

2. En $P_2(\mathbb{R})$, espacio de polinomios de grado menor o igual a 2, considere

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(2)q(2).$$

Demuestre que esto define un producto interno. Determine, entre todos los polinomios de grado 2 con coeficiente de x^2 igual a 1, el de norma mínima y calcule el cuadrado de su norma.

3. Sea $\mathcal{F}$ una familia de matrices simétricas que conmutan a pares. ¿Existirá una matriz ortogonal P tal que $P^T A P$ es una matriz diagonal, para cada matriz $A \in \mathcal{F}$?
4. Demuestre que todo espacio vectorial (aún de dimensión infinita) tiene una base.
5. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tales que

$$AB = 0 \quad \text{y} \quad A + B \text{ es invertible.}$$

Demuestre que

$$\text{rango}(A) + \text{rango}(B) = n$$

y que

$$\text{Im } B = \ker A.$$

Dé, además, un ejemplo de matrices 2×2 que satisfagan las hipótesis, pero para las cuales $BA \neq 0$.

II. Cálculo

6. Para cada una de las siguientes series, determine si diverge, converge absolutamente o converge condicionalmente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2 + n} - n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2 + 1} - n).$$

7. Calcule $F'(z)$ para $z \in (0, \infty)$, donde

$$F(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xz} \operatorname{sen}(x)}{x} dx$$

Argumente su respuesta.

8. Sea $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dada por $f(x) = \langle Ax, x \rangle$, donde $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ y $A \in M_n(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica. ¿ f tendrá un máximo o un mínimo absoluto? (Justifique por qué). En caso de existir tal máximo o mínimo calcularlo en términos de A .
9. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y no idénticamente nula. Suponga que

$$\int_0^1 e^{-x} f(x) dx = \int_0^1 e^{-2x} f(x) dx = 0.$$

Demuestre que f tiene al menos dos ceros distintos en $(0, 1)$.

10. Para cada $a > 0$, determine cuántas soluciones positivas tiene la ecuación

$$x^x = a.$$