

Examen de Admisión

7 de noviembre de 2025

(3 horas)

Resuelva correctamente al menos 3 problemas completos de cada tema.

Justifique todas sus respuestas.

I. Álgebra Lineal

1. Para cada una de las matrices abajo, determine si tienen inversa a la izquierda y encuentrela en caso afirmativo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Considere los polinomios $p_1(t) = 1 - 2t^2$, $p_2(t) = t + t^2 - t^3$ y $p_3(t) = t + 3t^2$ en $\mathbb{P}_3 = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 / a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$. Determine si los polinomios son linealmente independientes.
3. Calcule los subespacios nulo, columna y fila de la siguiente matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Probar que si A es una matriz hermitiana (es decir $A =$ transpuesta conjugada de A) de tamaño $n \times n$ entonces los valores propios de A son reales.
5. Calcular los valores y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

II. Cálculo

6. Decida si la siguiente integral converge:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2(x)}.$$

Justifique su respuesta.

7. Encuentre el paralelepípedo rectangular de volumen máximo inscrito en el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

con aristas paralelas a los ejes coordenados.

8. La curva definida por

$$x^y = y^x, \quad x, y > 0, \quad x \neq y$$

pasa por el punto $(2, 4)$.

- (a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en ese punto.
- (b) Demuestre que la curva se puede parametrizar por las ecuaciones

$$x(t) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1}, \quad y(t) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$$

para $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

9. Sea $a_1 = 1$ y

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right).$$

- (a) Demuestre que $a_n \geq \sqrt{2}$ para todo $n \geq 2$.
- (b) Suponiendo que la sucesión converge, encuentre su límite L .

10. Sea F la función definida para $x > 0$ por

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} dt.$$

- (a) Encuentre $F'(x)$.
- (b) Determine todos los puntos críticos de $F(x)$.