

Examen de Admisión
Enero 10, 2025 (10:00-13:00 hrs.)

Resuelva al menos 3 problemas de cada tema.

Justifique todas sus respuestas.

I. Álgebra Lineal

1. Defina la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Considere el polinomio $p(x) = x^2 - x - 2$. Calcule la traza de la matriz $p(A) = A^2 - A - 2I$, donde I es la matriz identidad.

2. Sea X el espacio de sucesiones de números reales $\{x_i\}_{i=1,2,\dots}$ cuadrado sumables, i.e. $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$.
i) Explique por qué X es un espacio de Hilbert.
ii) Sea $\{a_i\}_{i=1,2,\dots}$ una sucesión de números reales en el intervalo $(-1, 1)$. Defina el operador $T : X \rightarrow X$ como

$$T(\{x_i\}_{i=1,2,\dots}) = (\{a_i x_i\}_{i=1,2,\dots}).$$

Cuáles son los valores propios de T ?

3. Son los vectores $(i, 0, 0, 0), (0, 4, 6, 2), (0, -1, 1, -2), (0, 7, 3, 8)$ linealmente independientes en $\mathbb{C}^4$?
4. Sea X el espacio de polinomios sobre $\mathbb{R}$, y defina el operador

$$[Tp]x := \int_0^x p(t)dt, \quad \text{para } p \in X.$$

- i) Explique por qué T es un operador lineal y describa su rango.
ii) Explique cuál debe ser el dominio de T^{-1} para que sea un operador lineal.
5. Defina la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Demuestre que A es una isometría, es decir, que preserve la norma de un vector en $\mathbb{R}^2$.

II. Cálculo

6. Sean $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$. Demuestre que $\{x_n\}$ converge y encuentre su límite.
7. Sea $x_n = (-i)^n$. Cuáles son las subsucesiones de $\{x_n\}$ que convergen?
8. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy de números reales distintos de cero cuyo límite es mayor a cero. Demuestre que $\{x_n^{-1}\}$ es también una sucesión de Cauchy.
9. Explique si la siguiente serie converge o diverge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}.$$

10. Calcule el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}.$$