Sobre el estudio de algunos sistemas de la Física-Matemática usando transmutaciones

Luis M. Méndez

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Cinvestav - Unidad Querétaro

Seminario de Estudiantes

¿Cuál es el objetivo de la plática?

El objetivo principal es el estudio de las soluciones de las ecuaciones bicuaterniónicas

$$\left(D + M^{\overrightarrow{\alpha}}\right) U_1 = 0 \qquad \left(D - M^{\overrightarrow{\alpha}}\right) U_2 = 0$$

donde $U_i \in C^1(\Omega,\ H(\mathbb{C}))\ (i = 1, 2)$, Ω es algún dominio de $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{\alpha}$ es un bicuaternión puramente vectorial y D es el operador de Hamilton

$$D = \sum_{k=1}^{3} e_k \partial_k, \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Motivación

- **Mecánica Cuántica (Paul Dirac 1902-1984)**

[1] V. G. Kravchenko and V. V. Kravchenko. *Quaternionic factorization of the Schrodinger operator and its applications to some first-order systems of mathematical physics.* J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003) 11285-11297

Motivación

- **Mecánica Cuántica (Paul Dirac 1902-1984)**
  - En [1] se muestra como las ecuaciones de Dirac con diferentes tipos de potenciales pueden ser reescritas en términos de los operadores

$$D + M^{\overrightarrow{\alpha}} \qquad D - M^{\overrightarrow{\alpha}}$$

[1] V. G. Kravchenko and V. V. Kravchenko. *Quaternionic factorization of the Schrodinger operator and its applications to some first-order systems of mathematical physics.* J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003) 11285-11297

- **Mecánica Cuántica (Paul Dirac 1902-1984)**
  - En [1] se muestra como las ecuaciones de Dirac con diferentes tipos de potenciales pueden ser reescritas en términos de los operadores

$$D + M^{\overrightarrow{\alpha}} \qquad D - M^{\overrightarrow{\alpha}}$$

  - Por ejemplo, para el operador de Dirac con potencial escalar $D_{sc} = \widetilde{D} + i\varphi_{sc} I$, donde $\widetilde{D}$ es el operador de Dirac clásico para una partícula libre y con energía fija $\omega \in \mathbb{R}$

$$\widetilde{D} = i\omega\gamma_0 + \sum \gamma_k \partial_k + im$$

se puede reescribir como

$$D + M^{\overrightarrow{\alpha}}, \quad \overrightarrow{\alpha} = -i\omega e_1 - (m + \widetilde{\varphi}_{sc})\, e_2$$

[1] V. G. Kravchenko and V. V. Kravchenko. *Quaternionic factorization of the Schrodinger operator and its applications to some first-order systems of mathematical physics.* J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003) 11285-11297

Motivación

- **Electromagnetismo (James Maxwell 1831-1879)**

[2] V. V Kranchenko. *On the relation between the Maxwell system and the Dirac equation.* WSEAS Transaction on Systems. Vol.1, No. 2 (2002) pp 115-118

Motivación

- **Electromagnetismo (James Maxwell 1831-1879)**
  - Consideremos el sistema de Maxwell de tiempo armónico para un medio homogéneo isotrópico y sin fuentes

$$\begin{cases} rot \ \overrightarrow{H} = -i\omega\epsilon \overrightarrow{E} \\ rot \ \overrightarrow{E} = i\omega\mu \overrightarrow{H} \\ \mathrm{div} \ \overrightarrow{E} = 0 \\ \mathrm{div} \ \overrightarrow{H} = 0 \end{cases}$$

donde ω es la frecuencia, ϵ y μ son la permitividad y la permeabilidad respectivamente.

[2] V. V Kranchenko. *On the relation between the Maxwell system and the Dirac equation.* WSEAS Transaction on Systems. Vol.1, No. 2 (2002) pp 115-118

- **Electromagnetismo (James Maxwell 1831-1879)**
  - Consideremos el sistema de Maxwell de tiempo armónico para un medio homogéneo isotrópico y sin fuentes

$$\begin{cases} rot\ \overrightarrow{H} = -i\omega\epsilon\overrightarrow{E} \\ rot\ \overrightarrow{E} = i\omega\mu\overrightarrow{H} \\ \text{div}\ \overrightarrow{E} = 0 \\ \text{div}\ \overrightarrow{H} = 0 \end{cases}$$

    donde ω es la frecuencia, ϵ y μ son la permitividad y la permeabilidad respectivamente.
  - En [2] se mostró que el estudio de este sistema se reduce al estudio del siguiente par de ecuaciones

$$(D-\kappa)\overrightarrow{\varphi} = 0 \qquad (D+\kappa)\overrightarrow{\psi} = 0$$

    donde $\overrightarrow{\varphi}$ y $\overrightarrow{\psi}$ estan expresadas en términos de $\overrightarrow{E}$ y $\overrightarrow{H}$.

[2] V. V Kranchenko. *On the relation between the Maxwell system and the Dirac equation.* WSEAS Transaction on Systems. Vol.1, No. 2 (2002) pp 115-118

Motivación

Pero,

$$D + \kappa = P^{+}\left(D + M^{i\kappa e_1}\right) + P^{-}\left(D - M^{i\kappa e_1}\right)$$

$$D - \kappa = P^{-}\left(D + M^{i\kappa e_1}\right) + P^{+}\left(D - M^{i\kappa e_1}\right)$$

donde

$$P^{+} = \frac{1}{2}M^{1+ie_1} \qquad P^{-} = \frac{1}{2}M^{1-ie_1}$$

Motivación

- **Campos Magnéticos libre de fuerzas**

Motivación

- **Campos Magnéticos libre de fuerzas**
  - Estos campos son caracterizados por las soluciones de las ecuaciones

$$\operatorname{div}\ \mathbf{B} = 0 \qquad rot\ \mathbf{B} + \nu \mathbf{B} = 0$$

Motivación

- **Campos Magnéticos libre de fuerzas**
    - Estos campos son caracterizados por las soluciones de las ecuaciones

$$\mathrm{div}\ \mathbf{B} = 0 \qquad rot\ \mathbf{B} + \nu \mathbf{B} = 0$$

    - Este sistema es equivalente a la ecuación bicuaterniónica

$$\left(D + \nu\right) \mathbf{B} = 0$$

- **Campos Magnéticos libre de fuerzas**
  - Estos campos son caracterizados por las soluciones de las ecuaciones

$$\operatorname{div}\ \mathbf{B} = 0 \qquad rot\ \mathbf{B} + \nu \mathbf{B} = 0$$

  - Este sistema es equivalente a la ecuación bicuaterniónica

$$\left(D + \nu\right)\mathbf{B} = 0$$

- **Ecuación de Impedancia Eléctrica Tridimensional**

Motivación

- **Campos Magnéticos libre de fuerzas**
  - Estos campos son caracterizados por las soluciones de las ecuaciones

$$\operatorname{div}\ \mathbf{B} = 0 \qquad \mathit{rot}\ \mathbf{B} + \nu \mathbf{B} = 0$$

  - Este sistema es equivalente a la ecuación bicuaterniónica

$$(D + \nu)\,\mathbf{B} = 0$$

- **Ecuación de Impedancia Eléctrica Tridimensional**
  - Consideremos la ecuación

$$\operatorname{div}(\gamma \operatorname{grad} \varphi) = 0$$

donde γ es la admitividad y φ es el potencial eléctrico.

Motivación

- **Campos Magnéticos libre de fuerzas**
  - Estos campos son caracterizados por las soluciones de las ecuaciones

$$\operatorname{div}\ \mathbf{B} = 0 \qquad \mathit{rot}\ \mathbf{B} + \nu \mathbf{B} = 0$$

  - Este sistema es equivalente a la ecuación bicuaterniónica

$$(D + \nu)\,\mathbf{B} = 0$$

- **Ecuación de Impedancia Eléctrica Tridimensional**
  - Consideremos la ecuación

$$\operatorname{div}(\gamma \operatorname{grad} \varphi) = 0$$

  donde γ es la admitividad y φ es el potencial eléctrico.
  - Esa ecuación es equivalente a

$$\left(D + M^{\overrightarrow{\gamma}}\right) \overrightarrow{E}_1 = 0$$

donde $\overrightarrow{E}_1 = \sqrt{\gamma}\,\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{\gamma} = \frac{\operatorname{grad}\left(\sqrt{\gamma}\right)}{\sqrt{\gamma}}$ y $\overrightarrow{E} = -\operatorname{grad} \varphi$.

El Algebra de los Bicuaterniones (o Cuaterniones Complejos)

Consideremos el conjunto de los cuaterniones complejos

$$H = \{q : q = q_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3,\ \ q_k \in \mathbb{C}\}$$

$$e_k^2 = -1, \qquad \forall k = 1, 2, 3$$

$$e_j e_k + e_k e_j = 0, \quad \forall j, k = 1, 2, 3 \ \ (j \neq k)$$

Note que $\forall q \in H$:

$$q = q_0 + \overrightarrow{q} = Sc\,(q) + Vec\,(q)$$

La conjugación cuaterniónica la denotaremos por el operador C_H.

$$C_H(q) = q_0 - q_1 e_1 - q_2 e_2 - q_3 e_3$$

El operador M^p indica la multiplicación por la derecha

$$M^p q = q.p$$

¿Qué es un Operador de Transmutación?

Definition

Sean E un espacio topológico lineal, A y B dos operadores lineales actuando de E sobre E, E_1 y E_2 dos subespacios cerrados de E. Un operador lineal T invertible definido en todo el espacio E y actuando de E_1 sobre E_2 es llamado operador de transmutación para el par de operadores A y B si satisface las siguientes condiciones:

(i) T y T^{-1} son continuos en E.

(ii) La siguiente igualdad es válida

$$AT = TB$$

¿En qué sentido lograremos nuestro objetivo?

- Recordemos que nuestro objetivo es estudiar las soluciones de las ecuaciones

$$\left(D + M^{\overrightarrow{\alpha}}\right) U_1 = 0 \qquad \left(D - M^{\overrightarrow{\alpha}}\right) U_2 = 0 \tag{1}$$

¿En qué sentido lograremos nuestro objetivo?

- Recordemos que nuestro objetivo es estudiar las soluciones de las ecuaciones

$$\left(D + M^{\overrightarrow{\alpha}}\right) U_1 = 0 \qquad \left(D - M^{\overrightarrow{\alpha}}\right) U_2 = 0 \tag{1}$$

  - Construir unas soluciones especiales de dichas ecuaciones (**Potencias Formales Generalizadas**)

¿En qué sentido lograremos nuestro objetivo?

- Recordemos que nuestro objetivo es estudiar las soluciones de las ecuaciones

$$\left(D + M^{\overrightarrow{\alpha}}\right) U_1 = 0 \qquad \left(D - M^{\overrightarrow{\alpha}}\right) U_2 = 0 \tag{1}$$

  - Construir unas soluciones especiales de dichas ecuaciones (**Potencias Formales Generalizadas**)
  - Obtener una representación en Serie de Taylor para las soluciones de (1) en terminos de las potencias formales generalizadas.

¿En qué sentido lograremos nuestro objetivo?

- Recordemos que nuestro objetivo es estudiar las soluciones de las ecuaciones

$$\left(D + M^{\overrightarrow{\alpha}}\right) U_1 = 0 \qquad \left(D - M^{\overrightarrow{\alpha}}\right) U_2 = 0 \tag{1}$$

  - Construir unas soluciones especiales de dichas ecuaciones (**Potencias Formales Generalizadas**)
  - Obtener una representación en Serie de Taylor para las soluciones de (1) en terminos de las potencias formales generalizadas.
  - Aproximar (con cualquier precisión) las soluciones de (1) por medio de una combinación lineal finita de estas potencias formales (Teorema de aproximación de Runge)

¿Cómo construimos las Potencias Formales Generalizadas?

- Paso 1.

¿Cómo construimos las Potencias Formales Generalizadas?

- Paso 1.
  - Basado en resultados recientes de la teoría de operadores de transmutación, construiremos un par de operadores que transforman soluciones de la ecuación $Du = 0$ (llamadas funciones regulares) en soluciones de (1) .

¿Cómo construimos las Potencias Formales Generalizadas?

- Paso 1.
  - Basado en resultados recientes de la teoría de operadores de transmutación, construiremos un par de operadores que transforman soluciones de la ecuación $Du = 0$ (llamadas funciones regulares) en soluciones de (1) .
- Paso 2.

¿Cómo construimos las Potencias Formales Generalizadas?

- Paso 1.
  - Basado en resultados recientes de la teoría de operadores de transmutación, construiremos un par de operadores que transforman soluciones de la ecuación $Du = 0$ (llamadas funciones regulares) en soluciones de (1) .
- Paso 2.
  - Construiremos dos variables hipercomplejas z_1, z_2 tales que $z_k \in Ker\left(D\right), \forall k = 1, 2.$

¿Cómo construimos las Potencias Formales Generalizadas?

- Paso 1.
  - Basado en resultados recientes de la teoría de operadores de transmutación, construiremos un par de operadores que transforman soluciones de la ecuación $Du = 0$ (llamadas funciones regulares) en soluciones de (1) .
- Paso 2.
  - Construiremos dos variables hipercomplejas z_1, z_2 tales que $z_k \in Ker\left(D\right), \forall k = 1, 2.$
  - Usando un producto permutacional construiremos los polinomios de Fueter $\overrightarrow{z}^{\nu} \in Ker\left(D\right)$.

¿Cómo construimos las Potencias Formales Generalizadas?

- Paso 1.
  - Basado en resultados recientes de la teoría de operadores de transmutación, construiremos un par de operadores que transforman soluciones de la ecuación $Du = 0$ (llamadas funciones regulares) en soluciones de (1) .
- Paso 2.
  - Construiremos dos variables hipercomplejas z_1, z_2 tales que $z_k \in Ker\left(D\right), \forall k = 1, 2.$
  - Usando un producto permutacional construiremos los polinomios de Fueter $\overrightarrow{z}^{\nu} \in Ker\left(D\right)$.
- Paso 3.

¿Cómo construimos las Potencias Formales Generalizadas?

- Paso 1.
  - Basado en resultados recientes de la teoría de operadores de transmutación, construiremos un par de operadores que transforman soluciones de la ecuación $Du = 0$ (llamadas funciones regulares) en soluciones de (1).
- Paso 2.
  - Construiremos dos variables hipercomplejas z_1, z_2 tales que $z_k \in Ker\,(D)$, $\forall k = 1, 2$.
  - Usando un producto permutacional construiremos los polinomios de Fueter $\overrightarrow{z}^{\nu} \in Ker\,(D)$.
- Paso 3.
  - Aplicamos los operadores de transformación obtenidos en el paso 1 a los polinomios $\overrightarrow{z}^{\nu}$.

Sistema de Integrales Recursivas

Sea $f \in C^2(a, b) \cap C^1[a, b]$ una función de valores complejos y no nula en $[a, b]$. y consideremos las siguientes funciones auxiliares

$$\widetilde{X}^{(0)}(x) \equiv X^{(0)}(x) \equiv 1$$

$$\widetilde{X}^{(m)}(x) = m \int_{x_0}^{x} \widetilde{X}^{(m-1)}(\rho) \left[f^2(\rho)\right]^{(-1)^{m-1}} d\rho$$

$$X^{(m)}(x) = m \int_{x_0}^{x} X^{(m-1)}(\rho) \left[f^2(\rho)\right]^{(-1)^{m}} d\rho$$

donde x_0 es un punto fijo arbitraio en $[a, b]$. Introduzcamos los siguientes sistemas infinitos de funciones $\{\varphi_m\}_{m=0}^{\infty}$ y $\{\psi_m\}_{m=0}^{\infty}$

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} f(x)X^{(m)}(x), & m \text{ odd} \\ f(x)\widetilde{X}^{(m)}(x), & m \text{ even} \end{cases} \qquad \psi_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)}X^{(m)}(x), & m \text{ even} \\ \frac{1}{f(x)}\widetilde{X}^{(m)}(x), & m \text{ odd} \end{cases}$$

Un resultado reciente sobre transmutaciones

Theorem

Sea q una función de valores comlejos continua de una variable independiente $x \in [-b,\ b]$ *para el cual existe una solución particular* f *de la ecuación* $f'' - qf = 0$ *, tal que* $f \in C^2[-b,\ b]$ *,* $f \neq 0$ *en* $[-b,\ b]$ *y normalizada como* $f(0) = 1$*. Sea* $h := f'(0) \in \mathbb{C}$*. Entonces, el operador*

$$\mathbf{T}u(x) = u(x) + \int_{-x}^{x} \mathbf{K}(x,t;h)u(t)dt$$

con el núcleo definido por

$$\mathbf{K}(x,t;h) = \frac{h}{2} + K(x,t) + \frac{h}{2}\int_{t}^{x} \left(K(x,s) - K(x,-s)\right) ds$$

transforma x^m *en* $\varphi_m(x)$ *para cualquier* $m \in \mathbb{N}_0$ *y*

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right)\mathbf{T}[u] = \mathbf{T}\left[-\frac{d^2}{dx^2}(u)\right], \quad \forall u \in C^2[-b,b]$$

Un resultado reciente sobre transmutaciones

[3] Más aún, si el potencial $q \in C^1[-b,\ b]$ entonces el núcleo $\mathbf{K}(x,t;h)$ es la única solución del problema de Goursat

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - q(x)\right)\mathbf{K}(x,t;h) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{K}(x,t;h)$$

$$\mathbf{K}(x,x;h) = \frac{h}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x q(s)ds, \qquad \mathbf{K}(x,-x;h) = \frac{h}{2}$$

[3]H. Campos, V. V. Kravchenko, S. M. Torba. *Transmutations, L-bases and complete families of solutions of the stationary Schrodinger equation in the plane.* J. Math. Anal. Appl. 389 (2012), no. 2, 1222-1238

En [4] se mostró que para $u \in C^1(\Omega,\ H(\mathbb{C}))$

$$\left(D + M^{\overrightarrow{\alpha}}\right)\left(D - M^{\overrightarrow{\alpha}}\right) u = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \left(-\Delta + \nu_0\right) u_0 = 0 \\ \left(-\Delta + \nu_1\right) u_1 = 0 \\ \left(-\Delta + \nu_2\right) u_2 = 0 \\ \left(-\Delta + \nu_3\right) u_3 = 0 \end{cases}$$

donde $u_k \ (k = 0, 1, 2, 3)$ son las componentes de u y

$$\nu_k = -D\overrightarrow{\alpha}^{(k)} - \overrightarrow{\alpha}^2, \quad \forall k = 0, 1, 2, 3$$

$$\overrightarrow{\alpha}^{(k)} = e_k \overrightarrow{\alpha} e_k, \quad \forall k = 1, 2, 3$$

[4] V. G. Kravchenko and V. V. Kravchenko. *Quaternionic factorization of the Schrodinger operator and its applications to some first-order systems of mathematical physics.* J. Phys. A: Math. Gen. 36 (2003) 11285-11297

Construcción de los Operadores de Transformación

Sean $f_i(x_i) \in C^2\left([-a_i,\ a_i]\right)$ soluciones particulares de las ecuaciones de Schrodinger unidimensionales $\left(-\partial_i^2 + q_i(x_i)\right) f_i = 0$. Usando el teorema anterior y considerando la transformación de Darboux, tenemos:

$$\exists\ T_{f_i} : \left(-\partial_i^2 + q_i(x_i)\right) T_{f_i} = T_{f_i} \left(-\partial_i^2\right)$$

$$\exists\ T_{1/f_i} : \left(-\partial_i^2 + q_i^D(x_i)\right) T_{1/f_i} = T_{1/f_i} \left(-\partial_i^2\right)$$

Entonces

$$\left(-\Delta + \nu_0\right) T_{f_1} T_{f_2} T_{f_3} = T_{f_1} T_{f_2} T_{f_3}(-\Delta)$$

$$\left(-\Delta + \nu_1\right) T_{f_1} T_{1/f_2} T_{1/f_3} = T_{f_1} T_{1/f_2} T_{1/f_3}(-\Delta)$$

$$\left(-\Delta + \nu_2\right) T_{1/f_1} T_{f_2} T_{1/f_3} = T_{1/f_1} T_{f_2} T_{1/f_3}(-\Delta)$$

$$\left(-\Delta + \nu_3\right) T_{1/f_1} T_{1/f_2} T_{f_3} = T_{1/f_1} T_{1/f_2} T_{f_3}(-\Delta)$$

Construcción de los Operadores de Transformación

Consideremos los operadores

$$P^{+} = \frac{1}{2}\left(I + C_H\right) \qquad Q_k = -P^{+} e_k I, \ \forall k = 1, 2, 3$$

y definamos los siguientes operadores

$$T = T_{f_1} T_{f_2} T_{f_3} P^{+} + e_1 T_{f_1} T_{\frac{1}{f_2}} T_{\frac{1}{f_3}} Q_1 + e_2 T_{\frac{1}{f_1}} T_{f_2} T_{\frac{1}{f_3}} Q_2 + e_3 T_{\frac{1}{f_1}} T_{\frac{1}{f_2}} T_{f_3} Q_3 \tag{2}$$

$$\widetilde{T} = T_{\frac{1}{f_1}} T_{\frac{1}{f_2}} T_{\frac{1}{f_3}} P^{+} + e_1 T_{\frac{1}{f_1}} T_{f_2} T_{f_3} Q_1 + e_2 T_{f_1} T_{\frac{1}{f_2}} T_{f_3} Q_2 + e_3 T_{f_1} T_{f_2} T_{\frac{1}{f_3}} Q_3 \tag{3}$$

Relación entre los Operadores de Transformación

Theorem

Sean $f_i(x_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ *soluciones particulares de las ecuaciones de Schrodinger unidimensionales* $(-\partial_i^2 + q_i(x_i))f_i = 0$, *definidas y no-nulas en los intervalos simétricos* $[-a_i, a_i]$. *Supongamos que* $q_i \in C^1[-a_i, a_i]$. *Entonces, los operadores* T *y* $\widetilde{T}$ *definidos por* (2) *y* (3) *respectivamente, satisfacen las siguientes igualdades*

$$\left(D - M^{\overrightarrow{\alpha}}\right) Tu = \widetilde{T}(Du)\ , \left(D + M^{\overrightarrow{\alpha}}\right) \widetilde{T}u = T(Du), \quad \forall u \in C^1(\Omega,\ H(\mathbb{C}))$$

donde $\Omega \subseteq [-a_1, a_1]\ x\ [-a_2, a_2]\ x\ [-a_3, a_3]$ *and* $\overrightarrow{\alpha} = \frac{Df}{f}$, $f = f_1 f_2 f_3$.

Proof.

La prueba se basa en un cálculo directo y en el uso de las relaciones

$$\partial_k \left(\frac{1}{f_k} T_{f_k} u\right) = \frac{1}{f_k} T_{1/f_k} \partial_k u \quad ; \quad \partial_k \left(f_k T_{1/f_k} u\right) = f_k T_{f_k} \partial_k u$$

...y ahora?. ¿Para qué es últil esa relación?

$$¿\left(D - M^{\vec{\alpha}}\right) Tu = \widetilde{T}(Du)?$$

$$u \in Ker\,(D) \Longrightarrow \begin{cases} Serie\ de\ Taylor \\ Teorema\ de\ Runge \end{cases}$$

$$\uparrow$$
$$T$$
$$\downarrow$$

$$¿\ \mathbf{U} \in \mathbf{Ker}\left(D - M^{\vec{\alpha}}\right) \Longrightarrow \begin{cases} Serie\ de\ Taylor \\ Teorema\ de\ Runge \end{cases} ?$$

Variables de Fueter y Potencias Regulares

Recordemos que para $x = (x_0,\ x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^3$, las variables de Fueter estan dadas por

$$z_1 = x_1 + x_3 e_2, \quad z_2 = x_2 - x_3 e_1$$

En [5] se introdujo un producto permutacional sobre las variables hipercomplejas z_k

$$z_1 \ x \ z_2 = \frac{1}{2}(z_1 z_2 + z_2 z_1)$$

y se mostró que estas variables y su producto permutacional son funciones regulares. Introduciendo el multi-indice $\nu = (\nu_1,\ \nu_2)$, con $|\nu| = \nu_1 + \nu_2$, $\nu! = \nu_1!\nu_2!$ definimos las potencias $\overrightarrow{z}^{\nu}$ como

$$\overrightarrow{z}^{\nu} = z_1^{\nu_1} x z_2^{\nu_2}$$

Estas potencias también son regulares.

[5] H. Malonek. *Powers series representation for monogenic functions in $\mathbb{R}^{m+1}$ based on permutational product.* Complex variables, 1990, Vol. 15, pp 181-191

Potencias Formales Generalizadas

Aplicando los operadores T y $\widetilde{T}$ a las potencias $\overrightarrow{z}^{\,\upsilon}$ y denotando por $Z^{\nu} = T(\overrightarrow{z}^{\,\nu})$ y $\widetilde{Z}^{\nu} = \widetilde{T}(\overrightarrow{z}^{\,\nu})$, obtenemos

$$\begin{aligned} Z^{\nu} &= f_1 f_2 f_3 \left(Sc\ M_1^{\nu_1}.Sc\ G_2^{\nu_2}\right) + \frac{f_1}{f_2 f_3}\left(Sc\ M_1^{\nu_1}.Vec\ G_2^{\nu_2}\right) e_1 - \\ &\quad - \frac{f_2}{f_1 f_3}\left(Vec\ M_1^{\nu_1}.Sc\ G_2^{\nu_2}\right) e_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{Z}^{\nu} &= \frac{1}{f_1 f_2 f_3}\left(Sc\ F_1^{\nu_1}.Sc\ F_2^{\nu_2}\right) + \frac{f_2 f_3}{f_1}\left(Sc\ F_1^{\nu_1}.Vec\ F_2^{\nu_2}\right) e_1 - \\ &\quad - \frac{f_1 f_3}{f_2}\left(Vec\ F_1^{\nu_1}.Sc\ F_2^{\nu_2}\right) e_2 \end{aligned}$$

donde $F_1^{\nu_1}$, $F_2^{\nu_2}, M_1^{\nu_1}$, $G_2^{\nu_2}$ están expresadas en terminos de las potencias generalizadas $X_i^m(x_i)$, $\tilde{X}_i^m(x_i)$ $(i = 1, 2, 3)$.

Transformación de las Potencias Permutacionales

Theorem

Para cualquier $\beta \in H(\mathbb{C})$ las siguientes igualdades son válidas:

$$\widetilde{T}\left(\overrightarrow{z}^{\nu}.\beta\right) = \widetilde{Z}^{\nu}_{\beta} \qquad T\left(\overrightarrow{z}^{\nu}.\beta\right) = Z^{\nu}_{\beta}$$

$$\widetilde{T}\left(\beta\overrightarrow{z}^{\nu}\right) =_{\beta} \widetilde{Z}^{\nu} \qquad T\left(\beta\overrightarrow{z}^{\nu}\right) =_{\beta} Z^{\nu}$$

donde el subindice indica la multiplicación por el lado derecho o por el lado izquierdo.

Note que

$$\widetilde{Z}^{\nu}_{\beta} = \widetilde{H}^{\nu}_{0}\beta_0 + \widetilde{H}^{\nu}_{1}\beta_1 e_1 + \widetilde{H}^{\nu}_{2}\beta_2 e_2 + \widetilde{H}^{\nu}_{3}\beta_3 e_3$$

$$Z^{\nu}_{\beta} = H^{\nu}_{0}\beta_0 + H^{\nu}_{1}\beta_1 e_1 + H^{\nu}_{2}\beta_2 e_2 + H^{\nu}_{3}\beta_3 e_3$$

donde

$$\widetilde{H}_0^{\nu} = \frac{1}{f_1 f_2 f_3}\left(Sc\ F_1^{\nu_1}.Sc\ F_2^{\nu_2}\right) + \left[\frac{f_2 f_3}{f_1}\left(Sc\ F_1^{\nu_1}.Vec\ F_2^{\nu_2}\right)\right] e_1 - \left[\frac{f_1 f_3}{f_2}\left(Vec\ F_1^{\nu_1}.Sc\ F_2^{\nu_2}\right)\right] e_2$$

$$\widetilde{H}_1^{\nu} = \frac{f_2 f_3}{f_1}\left(Sc\ G_1^{\nu_1}.Sc\ G_2^{\nu_2}\right) + \left[\frac{1}{f_1 f_2 f_3}\left(Sc\ G_1^{\nu_1}.Vec\ G_2^{\nu_2}\right)\right] e_1 + \left[\frac{f_1 f_2}{f_3}\left(Vec\ G_1^{\nu_1}.Sc\ G_2^{\nu_2}\right)\right] e_2$$

$$\widetilde{H}_2^{\nu} = \frac{f_1 f_3}{f_2}\left(Sc\ M_1^{\nu_1}.Sc\ M_2^{\nu_2}\right) + \left[\frac{f_1 f_2}{f_3}\left(Sc\ M_1^{\nu_1}.Vec\ M_2^{\nu_2}\right)\right] e_1 + \left[\frac{1}{f_1 f_2 f_3}\left(Vec\ M_1^{\nu_1}.Sc\ M_2^{\nu_2}\right)\right] e_2$$

$$\widetilde{H}_3^{\nu} = \frac{f_1 f_2}{f_3}\left(Sc\ N_1^{\nu_1}.Sc\ N_2^{\nu_2}\right) + \left[\frac{f_1 f_3}{f_2}\left(Sc\ N_1^{\nu_1}.Vec\ N_2^{\nu_2}\right)\right] e_1 + \left[\frac{f_2 f_3}{f_1}\left(Vec\ N_1^{\nu_1}.Sc\ N_2^{\nu_2}\right)\right] e_2$$

Transformación de las Potencias Permutacionales

$$H_0^{\nu} = f_1 f_2 f_3 \left(Sc\ M_1^{\nu_1} . Sc\ G_2^{\nu_2} \right) + \left[\frac{f_1}{f_2 f_3} \left(Sc\ M_1^{\nu_1} . Vec\ G_2^{\nu_2} \right) \right] e_1 - \left[\frac{f_2}{f_1 f_3} \left(Vec\ M_1^{\nu_1} . Sc\ G_2^{\nu_2} \right) \right] e_2$$

$$H_1^{\nu} = \frac{f_1}{f_2 f_3} \left(Sc\ N_1^{\nu_1} . Sc\ F_2^{\nu_2} \right) + \left[f_1 f_2 f_3 \left(Sc\ N_1^{\nu_1} . Vec\ F_2^{\nu_2} \right) \right] e_1 + \left[\frac{f_3}{f_1 f_2} \left(Vec\ N_1^{\nu_1} . Sc\ F_2^{\nu_2} \right) \right] e_2$$

$$H_2^{\nu} = \frac{f_2}{f_1 f_3} \left(Sc\ F_1^{\nu_1} . Sc\ N_2^{\nu_2} \right) + \left[\frac{f_3}{f_1 f_2} \left(Sc\ F_1^{\nu_1} . Vec\ N_2^{\nu_2} \right) \right] e_1 + \left[f_1 f_2 f_3 \left(Vec\ F_1^{\nu_1} . Sc\ N_2^{\nu_2} \right) \right] e_2$$

$$H_3^{\nu} = \frac{f_3}{f_1 f_2} \left(Sc\ G_1^{\nu_1} . Sc\ M_2^{\nu_2} \right) + \left[\frac{f_2}{f_1 f_3} \left(Sc\ G_1^{\nu_1} . Vec\ M_2^{\nu_2} \right) \right] e_1 + \left[\frac{f_1}{f_2 f_3} \left(Vec\ G_1^{\nu_1} . Sc\ M_2^{\nu_2} \right) \right] e_2$$

y $F_i^{\nu_i}$, $M_i^{\nu_i}$, $G_i^{\nu_i}$, $N_i^{\nu_i}$ $\quad (i = 1, 2)$ están expresadas en terminos de las potencias generalizadas $X_j^m(x_j)$, $\widetilde{X}_j^m(x_j)$ $\quad (j = 1, 2, 3)$.

Sobre el Acotamiento de los Operadores de Transformación

Theorem

Los operadores T y $\widetilde{T}$ son acotados en el espacio de las funciones continuas con respecto a la norma $\|u\| = \sum_{i=0}^{3} \max |u_i|$, donde $u = u_0 + u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3 \in H(\mathbb{C})$.

Proof.

$$
\begin{aligned}
\|Tu\| &= \max(|T_{f_1} T_{f_2} T_{f_3} u_0| + |T_{f_1} T_{1/f_2} T_{1/f_3} u_1| + |T_{1/f_1} T_{f_2} T_{1/f_3} u_2| + \\
&\quad + |T_{1/f_1} T_{1/f_2} T_{f_3} u_3|) \\
&\leq M_0 \max |u_0| + M_1 \max |u_1| + M_2 \max |u_2| + M_3 \max |u_3|
\end{aligned}
$$

donde las constantes M_i (i=0,1,2,3) dependen solamente de los correspondientes núcleos de los operadores acotados T_{f_i} y T_{1/f_i}. La prueba para el operador $\widetilde{T}$ es análoga. □

Más aún, T^{-1} y $\widetilde{T}^{-1}$ también son acotados (la forma de los inversos para T_{f_i} y T_{1/f_i} se puede encontrar en [6]) debido a que sus núcleos integrales poseen las mismas propiedades de regularidad de los núcleos de T and $\widetilde{T}^{-1}$.

[6] V. V. Kravchenko and S. M. Torba. *Transmutations for Darboux transformed operators with applications.* Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 45 (2012), issue 7, #075201, 21 pages

Teorema de Aproximación de Runge

Theorem

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ *un dominio simplemente conexo contenido en* $C = [-a_1,\ a_1] \, x \, [-a_2,\ a_2] \, x \, [-a_3,\ a_3]$. *Entonces, cualquier solución* $U \in C^1(\Omega,\ H(\mathbb{C}))$ *de la ecuación* $\left(D - M^{\overrightarrow{\alpha}}\right) U = 0$, *con* $\overrightarrow{\alpha} = Df/f$ *y* f *una función escalar, puede ser arbitrariamente aproximada sobre cualquier subconjunto compacto* K *de* Ω *por una combinación lineal finita de las potencias formales generalizadas* Z^{ν}.

Proof.

Sea $U \in Ker\left(D - M^{\overrightarrow{\alpha}}\right)$ y consideremos $u = T^{-1}U$. Entonces u es una función regular. Debido al teorema de aproximación de Runge para las funciones regulares, existen coeficientes $\beta_\nu \in H(\mathbb{C})$ y $N > 0$ tales que

$$\| u - p_N^\nu \| < \frac{\epsilon}{\| T \|}, \quad \forall \epsilon > 0, \quad p_N^\nu = \sum_{|\nu|=0}^{N} \overrightarrow{z}^{\nu}.\beta_\nu$$

Usando el operador T

$$\| U - P_N^\nu \| \leq \| T \| \max_{x \in C} \| u - p_N^\nu \| < \epsilon, \quad P_N^\nu = \sum_{|\nu|=0}^{N} Z_{\beta_\nu}^{\nu}$$

Así, $\left\{ Z_\beta^\nu \right\}_{|\nu|=0}^{\infty}$ es una familia completa de soluciones para $Ker(D - M^{\overrightarrow{\alpha}})$. □

Próximo Objetivo (Serie de Taylor Generalizada)

Ahora el objetivo es construir una Serie de Taylor Generalizada para $Ker\left(D - M^{\overrightarrow{\alpha}}\right)$.

¿Cómo hacerlo?

$\Downarrow$

Introducir el concepto de derivadas generalizadas

$\Downarrow$

Aplicar el operador T a estas derivadas generalizadas

Derivadas Parciales Generalizadas

En [7] se introdujo el concepto de las derivadas generalizadas y se demostró el siguiente resultado.

Theorem

Sean $h \in C^m([-b,b])$, $g_1 = T_{f_k} h$ y $g_2 = T_{1/f_k} h$. Entonces, existen las primeras m f_k-derivadas parciales de g_1 y las primeras m $\frac{1}{f_k}-$ derivadas parciales de g_2 en $[-b,b]$ y se cumplen las siguientes igualdades

$$\partial_{f_k}^n [g_1] = \begin{cases} T_{1/f_k}\left[\partial_k^n h\right], & n \text{ impar} \\ T_{f_k}\left[\partial_k^n h\right], & n \text{ par} \end{cases} \qquad \partial_{1/f_k}^n [g_2] = \begin{cases} T_{f_k}\left[\partial_k^n h\right], & n \text{ impar} \\ T_{1/f_k}\left[\partial_k^n h\right], & n \text{ par} \end{cases}$$

[7]Kira V. Khmelnytskaya, V. V. Kravchenko, S. Torba and S. Tremblay. *Wave polynomials, transmutations and Cauchy problem for the Klein-Gordon euqation.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 399 (2013) 191-212

Derivadas Parciales Generalizadas

Por medio del teorema anterior e introduciendo los siguientes operadores diferenciales

$$A_1^{(n)} = \begin{cases} \partial^n_{1/f_1} P^+ + e_1 \partial^n_{1/f_1} Q_1 + e_2 \partial^n_{f_1} Q_2 + e_3 \partial^n_{f_1} Q_3, & n \text{ impar} \\ \partial^n_{f_1} P^+ + e_1 \partial^n_{f_1} Q_1 + e_2 \partial^n_{1/f_1} Q_2 + e_3 \partial^n_{1/f_1} Q_3, & n \text{ par} \end{cases}$$

$$A_2^{(n)} = \begin{cases} \partial^n_{1/f_2} P^+ + e_1 \partial^n_{f_2} Q_1 + e_2 \partial^n_{1/f_2} Q_2 + e_3 \partial^n_{f_2} Q_3, & n \text{ impar} \\ \partial^n_{f_2} P^+ + e_1 \partial^n_{1/f_2} Q_1 + e_2 \partial^n_{f_2} Q_2 + e_3 \partial^n_{1/f_2} Q_3, & n \text{ par} \end{cases}$$

$\widetilde{A}_1^{(n)}$ es similar a $A_1^{(n)}$ y $\widetilde{A}_2^{(n)}$ es similar a $A_2^{(n)}$ intercambiando f_1 por $\frac{1}{f_1}$ y f_2 por $\frac{1}{f_2}$ respectivamente, tenemos el siguiente resultado:

Transformación de las Derivadas Parciales Generalizadas

Theorem

Sea u una función regular definida en algún dominio Ω *de* $\mathbb{R}^3$ *y sean* $U = Tu$, $\widetilde{U} = \widetilde{T}u$ *las correspondientes soluciones de las ecuaciones*

$$\left(D - M^{\overrightarrow{\alpha}}\right) U = 0 \qquad \left(D + M^{\overrightarrow{\alpha}}\right) \widetilde{U} = 0$$

respectivamente. Entonces

$$T\left[\frac{\partial^n u}{\partial x_1^{n-m} \partial x_2^m}(0)\right] = A_1^{(n-m)} A_2^{(m)} (Tu)(0)$$

$$\widetilde{T}\left[\frac{\partial^n u}{\partial x_1^{n-m} \partial x_2^m}(0)\right] = \widetilde{A}_1^{(n-m)} \widetilde{A}_2^{(m)} \left(\widetilde{T}u\right)(0)$$

Serie de Taylor Generalizada

Consideremos el multi-indice $\nu = (\nu_1, \nu_2) = (n - m, m)$ con $m = 0, 1, 2, ..., n$.

Theorem

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un dominio que contiene al origen y $U \in C^1(\Omega,\ H(\mathbb{C}))$ solución de la ecuación $\left(D - M^{\overrightarrow{\alpha}}\right) U = 0$. Entonces, existen coeficientes $\beta^* \in H(\mathbb{C})$ y Λ una vecindad abierta del origen en la cual U puede ser expandida en una serie de Taylor en potencias formales generalizadas

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} Z^{\nu}_{\beta^*_{(n-m,m)}}$$

donde

$$\beta^*_{(n-m,m)} = \frac{1}{n!} A_1^{(n-m)} A_2^{(m)} (Tu)(0)$$

y la serie converge normalmente en Λ.

Proof.

Sea $U \in Ker\left(D - M^{\overrightarrow{\alpha}}\right)$ y consideremos $u = T^{-1}(U)$. Entonces, $u \in Ker\,(D)$ y por tanto puede ser expandida en uuna serie de Taylor normalmente convergente en Λ, como sigue:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\overrightarrow{z}^{\nu}.\beta_{(n-m,\ m)}, \qquad \beta_{(n-m,\ m)} = \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{n-m}\partial x_2^{m}}(0)$$

Aplicando el operador T y debido a la convergencia uniforme de la serie, tenemos que:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m} Z^{\nu}_{\beta_{(n-m,m)}}$$

Además, por el acotamiento uniforme del operador T, esta serie también converge normalmente en Λ. $\square$

Proof.

Pero sabemos que

$$T\left[\frac{\partial^n u}{\partial x_1^{n-m}\partial x_2^m}(0)\right] = A_1^{(n-m)} A_2^{(m)} \left(Tu\right)(0)$$

y como los operadores T_{f_k} y T_{1/f_k} preservan los valores iniciales de una función, tenemos que

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1^{n-m}\partial x_2^m}(0) = T\left[\frac{\partial^n u}{\partial x_1^{n-m}\partial x_2^m}(0)\right] = A_1^{(n-m)} A_2^{(m)} \left(Tu\right)(0)$$

y así $\beta_{(n-m,\ m)} = \beta^*_{(n-m,\ m)}$ y esto finaliza la prueba. $\square$