TEORÍA DE JUEGOS

Onésimo Hernández–Lerma

Departamento de Matemáticas
CINVESTAV–IPN

RESUMEN

Esta es una presentación introductoria sobre algunos conceptos básicos de la teoría de juegos y sus aplicaciones. Se incluyen temas sobre juegos estáticos (o de una tirada) y juegos dinámicos.

PROGRAMA

- ¿Qué es un juego?
- Algunas clases de juegos: ejemplos
- Juegos cooperativos: equilibrios de Pareto
- Juegos no–cooperativos: equilibrios de Nash

¿Qué es un juego (estratégico)?

Un juego es un modelo matemático de una situación de competencia (conflicto) o de negociación entre tomadores de decisiones (por ejemplo, individuos, empresas, gobiernos, etc.) llamados jugadores, agentes, controladores,...

Los juegos se clasifican de varias formas. Por ejemplo:

- Juegos **estáticos** (o de una tirada).
- Juegos **repetidos**.
- Juegos **dinámicos**: el estado del juego evoluciona como un sistema dinámico.

Observación.

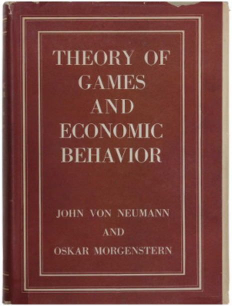
- Un juego estático con un jugador es un problema de **optimización**.
- Un juego dinámico con un jugador se llama **problema de control** o de **optimización dinámica**.

Notas históricas

- Siglo IV a.C. Aristoles [La política]: “La tragedia de los comunes”. (Juego estático, cooperativo y no-cooperativo).
- Siglo V d.C. Talmud: “juegos cooperativos”.
- 1713. Francis Waldegrave: primera “solucion minimax” (mixta o aleatorizada).
- 1838.Augustin Cournot: el “duopolio de Cournot” y una versión particular de un “equlibrio de Nash”.
- 1901. Vilfredo Pareto: óptimos de Pareto (equilibrios cooperativos).
- 1913. Ernst Zermelo: primer “teorema” de teoría de juegos (ajedrez).

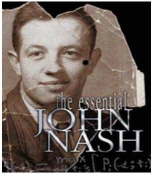
Notas históricas

- 1921-27. Emile Borel (varios artículos): estrategias mixtas (o aleatorizadas).
- 1928. John Von Neumann: Teorema minimax.
- 1944. Nacimiento de la teoria de juegos “moderna” con el libro **“Theory of games and economic behavior”.**



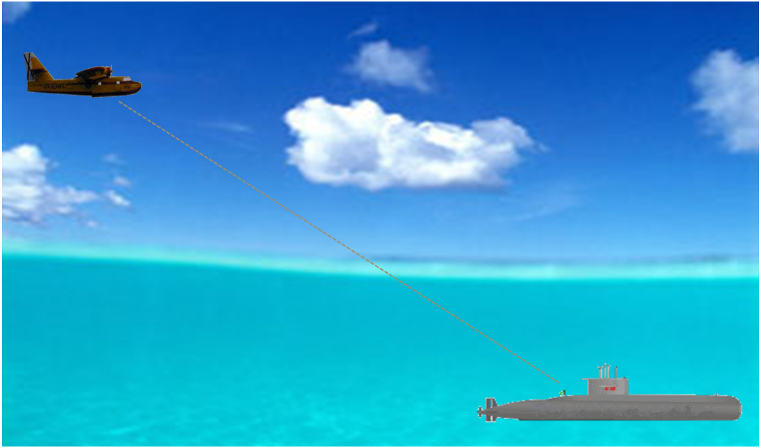
Notas históricas

- Abraham Wald: enfoque "minimax" (o *robusto* o de *juegos contra la naturaleza*) de la teoría de la decisión estadística. 1945.
- John Nash: juegos no–cooperativos, juegos de negociación. 1950. **Nobel Prize 1994.**



Notas históricas

- Durante la 2a Guerra Mundial se usaron juegos de persecución–evasión en técnicas de guerra antisubmarina.



Notas históricas

- E. Paxson (1946), Rufus Isaacs (1950): juegos diferenciales

$$\dot{x}_t = F(t, x_t, a_t), \quad 0 \leq t \leq T \leq \infty, \quad \text{con} \quad a_t = (a_t^1, \ldots, a_t^N)$$

Isaacs trabajó en distintos modelos de persecución–evasión, por ejemplo, de proyectiles contra aviones.

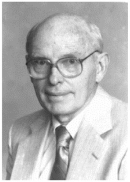
Notas históricas

- Lloyd Shapley (1953): juegos markovianos a tiempo discreto, e.g.

$$x_{t+1} = F(x_t, a_t, \xi_t) \; \forall \; t = 0, 1, ..., T \leq \infty; \quad x_0 = x$$

Premio Nobel 2012.

- Wendell H. Fleming (1960): juegos diferenciales estocásticos



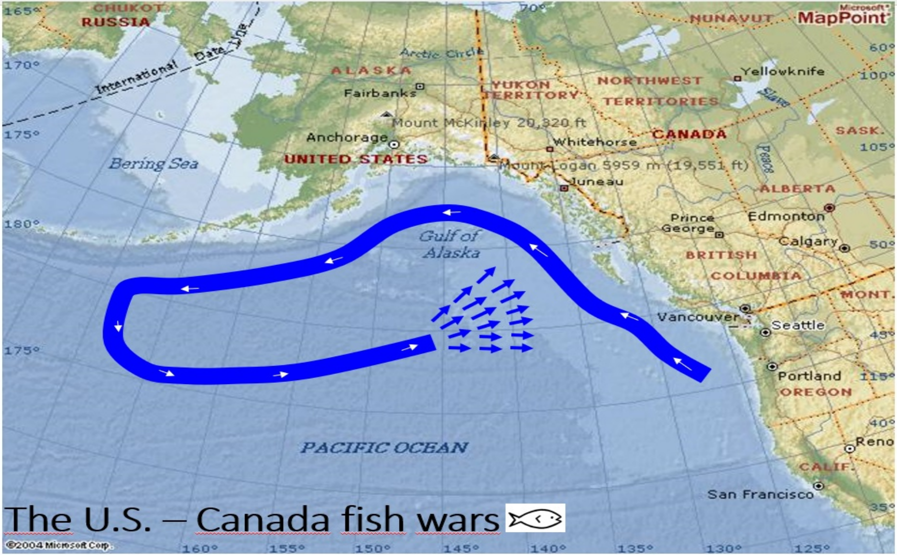
$$dx_t = F(t, x_t, a_t)dt + G(t, x_t, a_t)dW_t.$$

- Juegos markovianos de saltos, juegos híbridos.

Notas históricas

The general migration pattern of Pacific salmon raises an obvious question: Whose fish are they? Department of Fisheries and Oceans, Canada, 1997.

Notas históricas



The general migration pattern of Pacific salmon raises an obvious question: Whose fish are they? Department of Fisheries and Oceans, Canada, 1997.

- Discrete-time model:

$$x_{t+1} = G(x_t) - \sum_{i=1}^{N} k_i a_t^i + \xi_t \quad \forall\ t = 0, 1, \ldots,$$

with $x_t \geq 0\ \ \forall\ t$, where $G(x)$ is the population's natural growth function, e.g.

$$G(x) = rx(1 + x/K) \qquad \text{or} \qquad G(x) = ax^{1/2} - bx$$

- Stochastic differential model:

$$dx_t = [G(x_t) - \sum_{i=1}^{N} k_i a_t^i] dt + \sigma x_t dW_t.$$

Each player i ($i = 1, ..., N$) wishes to "optimize" a given objective function, e.g.

$$V_i(\pi, x) := E[\sum_{t=0}^{T} \alpha_i^t c_i(xt, a_t^1, ..., a_t^N)], \quad \text{with} \quad T \leq \infty,$$

defined for each initial state $x_0 = x$ and each **multistrategy**

$$\pi = (\pi^1, ..., \pi^N)$$

where $\pi^i = \{a_t^i\}$ is a strategy for player i.

Premios Nobel de Economía

- 2020: P.R. Milgrom, R.B. Wilson
- 2017: R. Thaler
- 2016: O. Hart, B. Holmstrom
- 2014: Jean Tirole.
- 2012: A.E. Roth, L.S. Shapley.
- 2011: T.J. Sargent, C.A. Sims.
- 2007: L.Hurwicz, E.S. Maskin, R. B. Myerson.
- 2005: R.J. Aumann, T.C. Schelling.
- 2002: Vernon L. Smith.
- 1994: J.C. Harsanyi, J.F. Nash, R. Selten.
- 1972: K. Arrow

Otras aplicaciones de la teoría de juegos:

- Juegos ambientales, e.g. explotación de recursos (agua, bosques, pesquerías, etc.), control de emisiones de gases "invernadero", ...
- Juegos de congestionamiento
- Redes de telecomunicaciones
- Subastas (e.g. de CETES, de yacimientos petroleros, del espectro de TV digital).

Ejemplo: oligopolios

Oligopolio: mercado o industria dominado por un grupo pequeño de vendedores (o productores o empresas). (La palabra *oligopolio* viene del griego *oligos* $\sim$ poco y *polein* $\sim$ vender.)

Ejemplos de oligopolios:

- Transportes (aerolíneas, trenes, autobúses, ...)
- Mercados energéticos (electricidad, gas, petróleo, ...)

Un modelo típico:

$$x_{t+1}^i = x_t^i + f(a_t^i) - \xi_t^i \quad \forall \ i = 1, \dots, N,$$

con $a_t^i = (p_t^i, \rho_t^i) =$ (producción, precio)

- Duopolio de Cuornot (1838): $a_t^i = p_t^i$

- Bertrand (1883), Edgeworth (1889):
  $a_t^i = \rho_t^i$

Clases de juegos

- **Juegos cooperativos:** Los jugadores actúan como grupo y coordinan sus acciones para su beneficio mutuo.
- **Juegos no-cooperativos:** Los jugadores son rivales y cada uno actúa en su propio interés, sin pensar en la suerte de los otros jugadores.

El caso estático

Considérese un juego estático (o de una tirada) G en *forma normal* (también llamada *forma estratégica*)

$$G := (N, \{A_i, i \in N\}, \{v_i, i \in N\})$$

donde

$N := \{1, 2, \ldots, n\}$ es el conjunto de jugadores; y, para cada $i \in N$,

A_i es el conjunto de acciones para el jugador i, y

$v_i : A \to \mathbb{R}$ es la función de pago del jugador i, donde

$$A := A_1 \times \cdots \times A_n.$$

Notación. Dado un vector (o "perfil estratégico") $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ y una acción $b_i \in A_i$, escribimos

$$a^{-i} := (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n),$$

$$(b_i, a^{-i}) := (a_1, \ldots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

En particular (abusando de la notación), podemos escribir $a = (a_i, a^{-i})$.

Definición 2.1.

Se dice que el vector $\hat{a} = (\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n) \in A$ es un **equilibrio de Nash** para el juego G si, para cada $i \in N$,

$$v_i(\hat{a}) \geq v_i(a_i, \hat{a}^{-i}) \quad \forall\, a_i \in A_i;$$

es decir, para cada $i \in N$,

$$v_i(\hat{a}_i, \hat{a}^{-i}) = \max_{a_i \in A_i} v_i(a_i, \hat{a}^{-i}).$$

Es decir, se tienen n problemas de optimización **acoplados**.

Ejemplo: la batalla de los sexos

Hay dos jugadores, “el” y “ella”. Cada uno puede elegir dos acciones: F (Futbol) o T (Teatro). Las funciones de pago $v_i(a, b)$, para $i = 1, 2$, están dadas por la bi-matriz.

		ELLA	
		F	T
EL	F	$\underline{2}$,$\underline{1}$	0,0
	T	0, 0	$\underline{1}$,$\underline{2}$

Ejemplo: el dilema de los prisioneros

De nuevo tenemos dos jugadores, cada uno con posibles acciones c (confesar) y $\sim c$ (no confesar).

	c	$\sim c$
c	$\underline{5},\underline{5}$	$\underline{0},15$
$\sim c$	$15,\underline{0}$	$1,1$

Ejemplo: el juego de los volados

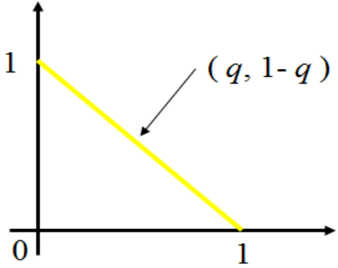
Dos jugadores, cada uno con acciones *a* (águila)y *s* (sol).

Jugador 2

		a	s
Jugador 1	a	-1,$\underline{1}$	$\underline{1}$,-1
	s	$\underline{1}$,-1	-1,$\underline{1}$

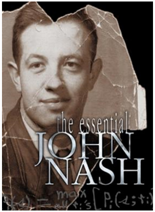
No existe equilibrio de Nash en el conjunto de acciones (a_1, a_2)

Sin embargo, sí existe un equilibrio de Nash en el conjunto de estrategias: *mixtas* o *aleatorizadas*.



Teorema [Nash 1950]:

Considérese un juego estático **finito**, es decir, hay un número finito de jugadores y, además, cada jugador tiene sólo conjunto finito de posibles acciones. Entonces existe al menos un equilibrio de Nash en el conjunto de estrategias aleatorizadas.



Juegos Dinámicos

Los juegos dinámicos se pueden clasificar en un gran número de formas. Consideremos un juego estocástico, no–estacionario, a tiempo discreto, con n jugadores y espacio de estados $X \subset \mathbb{R}^d$. Suponemos que el juego evoluciona como:

$$x_{t+1} = f_t(x_t, a_t^1, ..., a_t^n, \xi_t), \quad t = 0, 1, ... \tag{1}$$

Juegos Dinámicos

para algún estado inicial dado $x_0 \in X$. Para cada jugador $i \in \{1, ..., n\}$ y cada tiempo $t = 0, 1, ...,$ el control a_t^i toma valores en un conjunto $A_i \subset \mathbb{R}^{m_i}$. Las "perturbaciones" ξ_t en (1) forman una sucesión de variables aleatorias independientes con valores en algún espacio S_t.

Cada jugador i desea optimizar una función de pago de la forma

$$V^i := E\left[\sum_{t=0}^{\infty} r_t^i(x_t, a_t^1, ..., a_t^n)\right] \tag{2}$$

sujeta a la condición (1).

Estrategias

Si cada acción a_t^i del jugador i se determina de acuerdo a una función $\phi^i(t, x_t)$, se dice de ϕ^i es una **estrategia markoviana** (o de **lazo cerrado**) para el jugador i. Si a_t^i depende únicamente del tiempo t, digamos, $a_t^i = \psi^i(t)$, decimos que ψ^i es una estrategia de **lazo abierto**. En cualquier caso, las decisiones de los jugadores se toman en forma simultánea e independiente.

Un vector $f = (f^1, ..., f^n)$ de estrategias de Markov o de lazo abierto se llama una **multiestrategia**. En este caso escribimos la función de pago del jugador i como

$$V^i(f) \quad \text{ó} \quad V^i(f^i, f^{-i}).$$

Definición

Una multiestrategia markoviana $\hat{\phi} = (\hat{\phi}^1, ..., \hat{\phi}^n)$ se dice que es un **equilibrio de Nash–Markov** si, para cada jugador $i = 1, ..., n$,

$$V^i(\hat{\phi}^i, \hat{\phi}^{-i}) = \max_{\phi^i} V^i(\phi^i, \hat{\phi}^{-i})$$

donde el máximo es sobre todas las estrategias markovianas ϕ^i del jugador i. La definición de **equilibrio de Nash de lazo abierto** es similar.

Definición

Una multiestrategia ϕ (markoviana o de lazo abierto) es una **solución de Pareto** (o **equilibrio cooperativo**) del juego (1)–(2) si ϕ maximiza una combinación convexa

$$E\left\{\sum_{t=0}^{\infty}[\lambda_1 r_t^1(x_t, a_t) + \ldots + \lambda_n r_t^n(x_t, a_t)]\right\}$$

sujeta a (1), para algún $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ con $\lambda_i > 0$ para todo i y $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$.

Teorema

Supóngase que las funciones r_t^i son de la forma

$$r_t^i(x_t, a_t) = g_t^i(a_t^i) \quad \text{para todo} \quad i = 1, ..., n; \;\; t = 0, 1, ...$$

Entonces cualquier solución de Pareto de lazo abierto es un equilibrio de Nash de lazo abierto.

Ejemplo: La gran guerra pesquera [Levhari, Mirman 1980]

Sea $x_t (t = 0, 1, ...)$ la población de peces al tiempo t en una cierta pesquería "abierta", en la que pescan n países. Cada país i desea maximizar

$$\sum_{t=o}^{\infty} \beta_1^t log(c_t^i), \qquad i = 1, ..., n, \tag{3}$$

donde β_i es un factor de descuento en (0,1) y c_t^i es la captura del pais i al tiempo t. La población de peces evoluciona como

$$x_{t+1} = (x_t - c_t^1 - ... - c_t^n)^\alpha \qquad t = 0, 1, ..., \tag{4}$$

para algún $0 < \alpha < 1$.

Ejemplo: La gran guerra pesquera [Levhari, Mirman 1980]

Para encontrar una solución de Pareto (o equilibrio cooperativo) se desea maximizar una combinación convexa de las funciones en (3), es decir

$$\sum_{t=0}^{\infty}[\lambda_1\beta_1^t log(c_t^1)+...+\lambda_n\beta_n^t log(c_t^n)] \tag{5}$$

sujeta a (4). En este caso se puede calcular la estrategia markoviana óptima

$$\hat{c}_t^i=\lambda_i g_i(t)\hat{x}_t \qquad t=0,1,..., \tag{6}$$

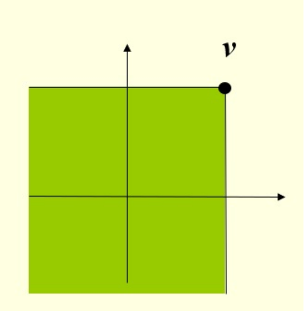
con coeficientes $g_i(t)$ que se pueden calcular explícitamente. Por el Teorema anterior, la solución de Pareto (6) también es un equilibrio de Nash–Markov para el juego (3)–(4).

Nota importante. Un juego dinámico es un juego potencial (dinámico) si existe un problema de control cuyos controles óptimos son un equilibrio de Nash para el juego dinámico. En el juego de la gran guerra pesquera la combinación convexa (5) define un problema de control. Por lo tanto, dicho juego es un juego potencial (dinámico).

Juegos Cooperativos

Notación. Si $u = (u_1, ..., u_N)$ y $v = (v_1, ..., v_N)$ están en R^N:

- $u \leq v$ si y sólo si $u_i \leq v_i \quad \forall i$
- $u < v$ si y sólo si $u \leq v$ y $u \neq v$



Juegos Cooperativos

Fix an arbitrary initial state x_0 (possibly random), and let

$$V_i(\pi) \equiv V_i(\pi, x_0), \qquad i = 1, ..., N$$

be the cost function of player i, when the players use the multistrategy $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_N) \in \Pi$, $\Pi := \Pi_1 \times ... \times \Pi_N$. Let

$$V(\pi) := (V_1(\pi), ..., V_N(\pi))$$

and

$$\Gamma := \{V(\pi) | \pi \in \Pi\} \subset R^N$$

be the game's **objective set**.

Juegos Cooperativos

Definición

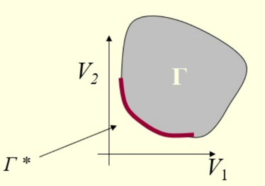
A multistrategy $\pi^* \in \Pi$ is called a **Pareto equilibrium** (also known as a **cooperative equilibrium**) if there is no $\pi \in \Pi$ for which

$$V(\pi) < V(\pi^*).$$

The set

$$\Gamma^* := \{V(\pi^*) | \pi^* \in \Pi \quad \text{is a Pareto equilibrium}\}$$

is called the game's **Pareto front**.



Juegos Cooperativos

Teorema

Under some hypotheses, π^* is a Pareto equilibrium iff there is a vector $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_N)$, with $\lambda_i > 0 \; \forall i$, and such that π^* minimizes

$$\lambda \cdot V(\pi) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i V_i(\pi)$$

Why is π^* a "cooperative equilibrium"? It is cooperative because no other joint decision of the players can improve the performance of at least one of them, without degrading the performance of the others. This leads to the following **question:**

Juegos Cooperativos

When is a cooperative equilibrium "fair" to all the players?

A possible answer. For each $i \in \{1, ..., N\}$, let

$$V_i^* := \inf_\pi V_i(\pi),$$

and consider the game's **utopic** (or **virtual**, or **ideal**) minimum

$$V^* := (V_1^*, ..., V_N^*).$$

Then a multistrategy π^* is a **compromise solution** with respect to a norm $||\cdot||$ on R^N if

$$||V(\pi^*) - V^*|| = \min_\pi ||V(\pi) - V^*||.$$

GRACIAS POR SU ATENCIÓN