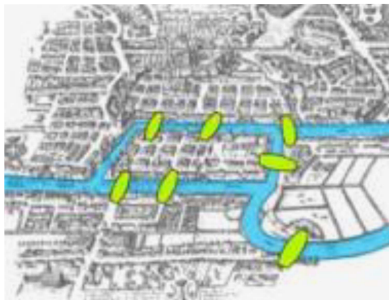


TOPOLOGÍA ALGEBRAICA Y COMPUTACIONAL EN LA ROBÓTICA

¿Qué es y cómo se usa la Top. Alg.?

Königsberg (XVIII)



Rio Pregel



Euler

Poincaré

"Analysis Situs"

1900 → presente

π_1 → Conj. de Poincaré (caract. de S^3)

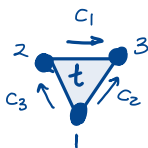
Problema del Milenio ✓

H_2 ← característica de Euler (siglo XVIII)

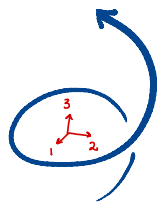
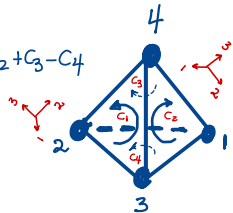
$$\partial(i) = 2 - 1'$$



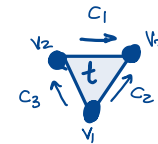
$$\partial(t) = c_1 - c_2 + c_3$$



$$\partial(t) = c_1 - c_2 + c_3 - c_4$$



•••
simplejos de dimensiones
arbitrarias



$$\begin{aligned} \text{dim}=2 & & \text{dim}=1 & & \text{dim}=0 \\ \mathbb{Z}_t & \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}_{c_1} \oplus \mathbb{Z}_{c_2} \oplus \mathbb{Z}_{c_3} & \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}_{v_1} \oplus \mathbb{Z}_{v_2} \oplus \mathbb{Z}_{v_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t & \rightarrow c_1 - c_2 + c_3 & c_1 & \rightarrow v_3 - v_2 \\ & & c_2 & \rightarrow v_3 - v_1 \\ & & c_3 & \rightarrow v_2 - v_1 \end{aligned}$$



$$H_2 = 0$$

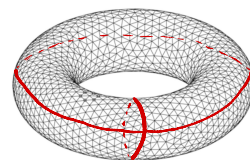
$$H_1 = 0$$

$$H_0 = \mathbb{Z}$$



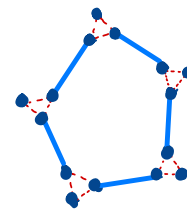
$$H_1 = \mathbb{Z}$$

$$H_0 = \mathbb{Z}$$



$$\left. \begin{aligned} H_0 &= \mathbb{Z} \\ H_1 &= \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ H_2 &= \mathbb{Z} \end{aligned} \right\}$$

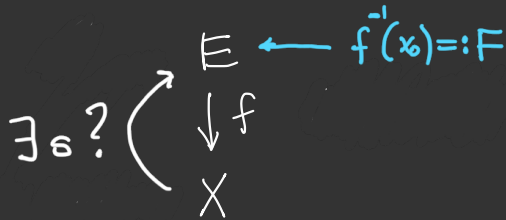
Nubes de datos
(ATD)
persistencia



- motivación: $H^*(\text{Conf}(G, n))$

ROBÓTICA via Topología Algebraica:

- secciones

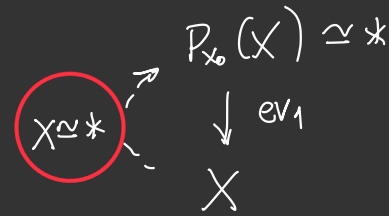


$$n \mapsto e_{n,f} \in H^{n+1}(X; \pi_n(F))$$

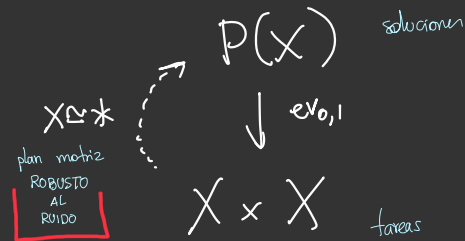
fibra

Teorema: $0 \neq n \iff \exists s$

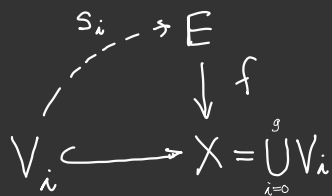
- Lusternik-Schnirelmann



- planeación matriz



- género de Schwarz [multisecc]

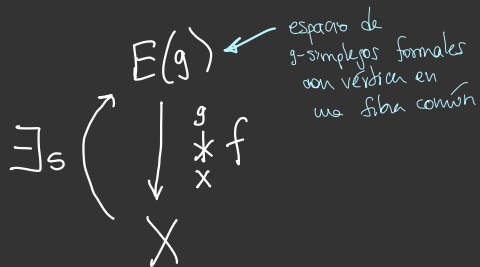


$$\text{secat}(f) = \min g$$

$\text{secat}=0 \Leftrightarrow$ sección global

- Schwarz [multisecc \leftrightarrow monosecc]

$$\text{secat}(f) \leq g \text{ si y sólo si}$$



- ejemplo (Lusternik-Schnirelmann)

$$\text{cat}(X) = \text{secat} \begin{pmatrix} P_b(X) \\ \downarrow \text{ev}_1 \\ X \end{pmatrix}$$

puntos críticos de funcionales suaves (de Morse)

- complejidad topológica

$$\text{TC}(X) = \text{secat} \begin{pmatrix} P(X) \\ \downarrow \text{ev}_{0,1} \\ X \times X \end{pmatrix}$$

instrucciones matrices locales robustas al ruido

- ejemplos :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cat}(S^n) = 1 \\ \text{TC}(S^n) = 1/2 \end{array} \right.$$

$$\text{Hopf}([i, i]: S^{2n-1} \rightarrow S^n \vee S^n) = 0/2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cat}(\mathbb{R}P^n) = n \\ \text{TC}(\mathbb{R}P^n) = \text{Inm}(\mathbb{R}P^n) \end{array} \right.$$

Foxley
 Tabachnikov
 Yuzvinsky

$\sim 2n - \alpha(n)$
 ? (clásico)

- estimaciones [Schwarz] :

$$\text{cup}(\cancel{\ker(f^*)})^{\mathbb{H}^*} \leq \text{secat} \left(\begin{array}{c} E \\ \downarrow f \\ X \end{array} \right)^{\mathbb{H}^*} \leq \frac{\cancel{\text{hdim}(Y)}}{1 + \cancel{\text{st}(F)}}$$

información homológica
(accesible)

información homotópica
(sutil)

- $\text{cat}(X) \leq \text{TC}(X) \leq 2 \cdot \text{cat}(X)$

todas las posibilidades son realizables ...

1 Planeación matriz simultánea
 $TC(X \times Y) \leq TC(X) + TC(Y)$

$X=Y$: ¡ evitar choques !

2 Planeación matriz secuencial

$$TC_s(X) = \text{secat} \left(\begin{array}{c} PX \\ \downarrow e_s \\ X \times X \times \dots \times X \\ \leftarrow s \end{array} \right)$$

[multi-tarea]



Conjetura (Farber)
 $= TC_{s-1}(X) + \text{cat}(X)$
 si $s \gg 0$

• $\text{Conf}(X, n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n : x_i \neq x_j\}$

$U\text{Conf}(X, n) = \text{Conf}(X, n) / \Sigma_n$

... topología sutil

Ejemplo: (Grant-G)

For $d \geq 2$:

$$TC_s(\text{Conf}(\mathbb{R}^d, n)) = \begin{cases} s(n-1) - 1, & d \text{ par} \\ s(n-1), & d \text{ impar} \end{cases}$$

- generaliza el caso de esferas
- depende de la paridad de d
- poco se sabe { fuera del caso Euclideo en el caso desordenado } ¡ + sutil !
- caso $d=1$ es especial (global):

- $d=1$: $\Gamma = \text{Gráfica}$
 $TC_s(\text{Conf}(\Gamma, n)) = ?$
 — robots sobre rieles

- Farley-Sabalka (DMT)
usualmente $\chi \leq 0$

$$\left. \begin{array}{l} \text{hdim}(\text{Conf}(\Gamma, n)) \\ \text{hdim}(\text{UConf}(\Gamma, n)) \end{array} \right\} \leq \begin{cases} \lfloor \frac{1}{2}(n+1-\chi(\Gamma)) \rfloor \\ \# \text{ vértices esenciales} \end{cases}$$

Sin embargo $H^*(\text{Conf}(\Gamma, n)) = ?$
 $H^*(\text{UConf}(\Gamma, n)) = ??$

1ª aprox : $\Gamma = T$ árbol en lo que sigue

Teorema (Aguilar-G.)

$$TC_s(\text{Conf}(T, n)) = s \cdot \min \left\{ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \# \text{ esenciales} \right\}$$

métodos ad hoc
topología ~~tórica~~

Teorema (G-Hoekstra)

$H^*(\text{UConf}(T, n))$ es accesible \rightarrow

En particular $TC_s(\text{UConf}(T, n))$
 es máxima posible en muchos casos

A

“anillo exterior de caras”

K = complejo simplicial

$$\Lambda_K = \frac{\wedge(\text{vértices de } K)}{\text{no caras de } K}$$

(base \leftrightarrow caras)

Conjetura (Farley-Sabalka)

$$H^*(\text{UConf}(T, n)) = \Lambda_K$$

¿relación entre T e K ?

B

“grupo de Artin de ángulo recto (GAAR)”

Γ = gráfica

$$G_\Gamma = \langle \text{vértices} \mid ab=ba \text{ si } \overline{ab} \in \Gamma \rangle$$

Salvetti:

$$K(G_\Gamma, 1) = \mathbb{Z}(\overline{S^1}, K_\Gamma) \cong \prod_{\text{vértices}} S^1$$

topología torica

K_Γ = complejo simplicial de cliques de Γ

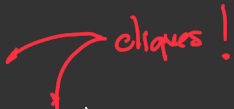
Nota:

$$H^*(\mathbb{Z}(S^1; K_\Gamma)) = H^*(G_\Gamma) = \Lambda_{K_\Gamma}$$

cliques!

Teorema (Kim-Ko-Park)

Las siguientes son equivalentes:

- $H^*(\text{UConf}(T, n)) = \bigwedge K_T$  cliques!
- $\text{UConf}(T, n) \simeq Z(S^1; K_T)$
- $n \leq 4$ o T es **lineal**

Teorema (G-Gutiérrez)

$\text{TC}_S(Z(S^1; K))$ está dado por

$$\max \left\{ \sum_{\ell=1}^S |\sigma_\ell| - \left| \bigcap_{\ell=1}^S \sigma_\ell \right| : \sigma_i \in K \right\}$$

— respuesta No max posible


— planeación motriz anatómica

Teorema (G-Hoekstra)



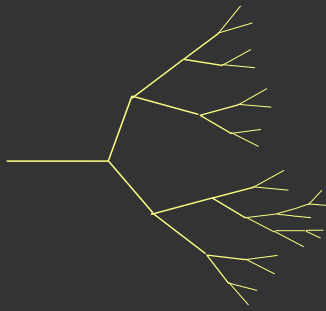
La conjetura de Farley-Sabalka es cierta (por ejemplo) para T **binario**:

$$H^*(\text{UConf}(T, n)) = \bigwedge K(T, n)$$

 complejo de Interacciones locales

$$k(T, n)$$

$$T = *$$

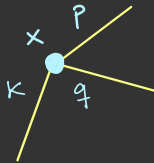


[direcciones]

Vértices: $v = (x; k, p, q)$

información local

$$k + p + q = n - 1$$



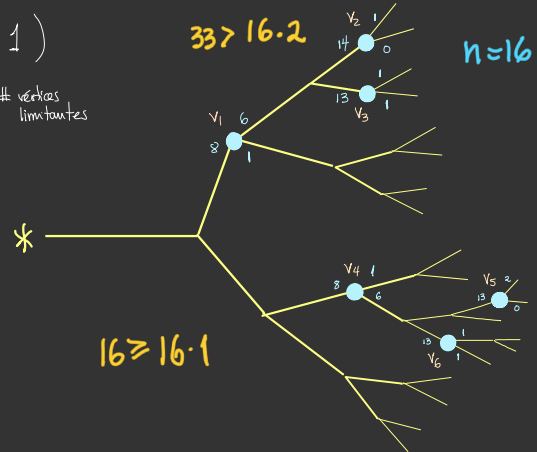
Simplejo: $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

en cada componente

$$\sum \text{infos} \geq n(L-1)$$

estada en direccion 1 del menor limitante

≠ vértices limitantes

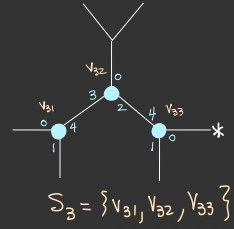
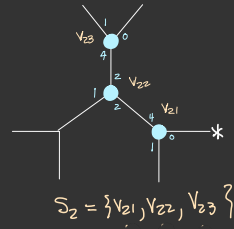
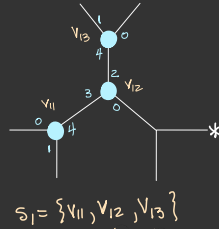


Ejemplo $TC_3(\text{Conf}(\text{---} \underset{\text{---}}{\underset{\text{---}}{\text{---}}}, 6)) = 9$

$\text{hdim}(\text{Conf}(\text{---} \underset{\text{---}}{\underset{\text{---}}{\text{---}}}, 6)) \leq 3$

Lema

$K(\text{---} \underset{\text{---}}{\underset{\text{---}}{\text{---}}}, 6)$ tiene 3 simplejos
maximales con intersección vacía.



En $H^*(\text{Conf}(\text{---} \underset{\text{---}}{\underset{\text{---}}{\text{---}}}, 6))^{\otimes 3}$:

$$\begin{aligned} & (v_{11} \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes v_{11} \otimes 1) (v_{12} \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes v_{12} \otimes 1) (v_{13} \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes v_{13}) \cdot \\ & \cdot (1 \otimes v_{21} \otimes 1 - v_{21} \otimes 1 \otimes 1) (1 \otimes v_{22} \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes v_{22}) (1 \otimes v_{23} \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes v_{23}) \cdot \\ & \cdot (1 \otimes 1 \otimes v_{31} - 1 \otimes v_{31} \otimes 1) (1 \otimes 1 \otimes v_{32} - 1 \otimes v_{32} \otimes 1) (1 \otimes 1 \otimes v_{33} - v_{33} \otimes 1 \otimes 1) = \\ & = v_{11} v_{12} v_{13} \otimes v_{21} v_{22} v_{23} \otimes v_{31} v_{32} v_{33} + \text{otros b\'asicos} \neq 0 \end{aligned}$$



EPÍLOGO

- configuraciones físicas
- colisiones controladas