

Algunas Aplicaciones de la Topología

Miguel A. Xicoténcatl Merino

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del IPN

Escuela de Verano, Julio 2023

Variedades

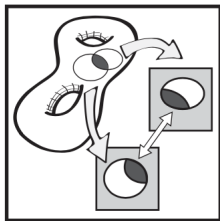
Definición: Una n -**variedad** M es un espacio localmente \approx a \mathbb{R}^n .

Existe una cubierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ y funciones $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuas, biyectivas con inversa continua.

- M es **suave** si las composiciones

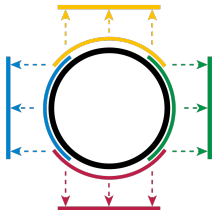
$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

son funciones diferenciables.

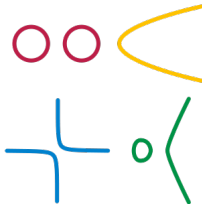


Ejemplo: El círculo unitario

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$



- Las 1-variedades son las curvas suaves



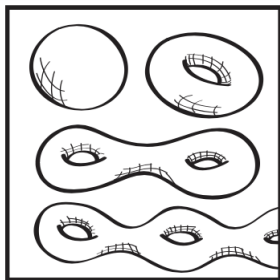
- Las 2-variedades son las superficies suaves

Las superficies conexas, compactas, orientables están clasificadas por su género

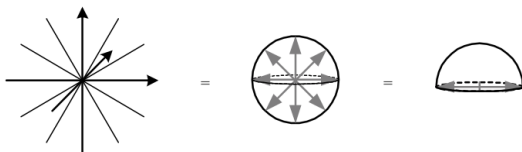
$$g = 0 \quad \mathbb{S}^2$$

$$g = 1 \quad \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

En general: $S_g = \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$



- El plano proyectivo $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2 / x \simeq \pm x$

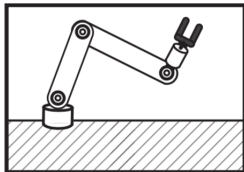


- Superficies compactas no orientables $N_h = \mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$

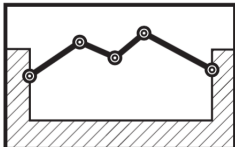
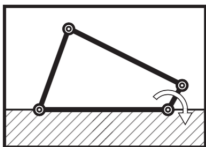
Espacios de configuraciones

En un brazo robot, el espacio de posiciones posibles (configuraciones) tiene la topología de un toro de dim. n

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$$



Sistema o acoplamiento mecánico:



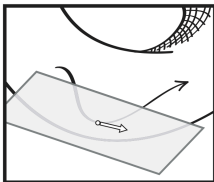
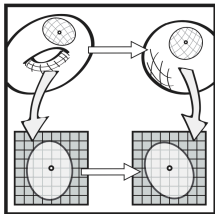
Teorema (Kapovich-Milson, 2002) Toda variedad compacta es difeomorfa al espacio de configuraciones de un sistema mecánico.

Derivadas

Definición: Una función $f : M \rightarrow N$ es diferenciable si $\forall p \in U_\alpha \subset M$
y $f(p) \in V_\beta \subset N$

$$\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}$$

es una función suave entre abiertos de \mathbb{R}^m y \mathbb{R}^n .



$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M, \quad \gamma(0) = p,$$

$$\gamma'(0) \in T_p M$$

- El espacio tangente a M en un punto $p \in M$, es el espacio vectorial $T_p M$ de direcciones tangentes a M en p .
- Derivada: $Df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ (transformación lineal)

Definición:

- $p \in M$ es **punto regular** si $Df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es sobre.
- $q \in N$ es **valor regular** si $f^{-1}(q) \subset M$ consiste de ptos. regulares.

Lema: Si $T : U \rightarrow V$ es una transformación lineal entre espacios vectoriales de dim. finita

$$\dim \ker(T) + \dim \operatorname{im}(T) = \dim U$$

Si T es sobre, se tiene:

$$\dim \ker(T) = \dim U - \dim V$$

Teorema (de la preimagen)

Si $q \in N$ es valor regular de $f : M \rightarrow N$, entonces $f^{-1}(q) \subset M$ es una subvariedad tal que

$$\dim f^{-1}(q) = \dim M - \dim N$$

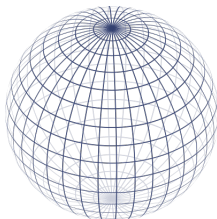
Ejemplo: La esfera unitaria \mathbb{S}^n

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

es una variedad de dimensión n

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$$



$$\mathbb{S}^n = f^{-1}(1)$$

- $\nabla f_x = (2x_1, \dots, 2x_{n+1})$
- 1 es valor regular de f
- $\dim \mathbb{S}^n = (n+1) - 1 = n$

Ejemplo: El grupo ortogonal $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = I_n\}$
es una variedad compacta de dimensión $n(n-1)/2$.

$$f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Sim}_n(\mathbb{R}) \quad \longleftarrow \quad (\text{matrices simétricas})$$
$$A \longmapsto A \cdot A^t$$

- $O(n) = f^{-1}(I_n)$.
- I_n es valor regular de f :

$$Df_A(\vec{X}) = \left. \frac{d}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} (A + \lambda X)(A + \lambda X)^t$$
$$= (A \cdot A^t + X \cdot A^t) + (A \cdot A^t + A \cdot X^t) = B$$

Resolver : $X \cdot A^t + A \cdot X^t = C \quad \Rightarrow \quad X = \frac{1}{2}CA$

- $O(n)$ es una subvariedad de $M_n(\mathbb{R})$ de dimensión

$$\dim O(n) = n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n-1).$$

Observación:

$$\begin{aligned} A \in O(n) &\Leftrightarrow \text{filas de } A \text{ forman una base o.n. de } \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow \text{columnas de } A \text{ forman base o.n. de } \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ preserva normas, i.e.} \\ &\qquad\qquad\qquad \|Ax\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow A \text{ preserva productos internos} \\ &\qquad\qquad\qquad \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

- $A \in O(n) \Rightarrow \det(A) = \pm 1$
- $O(n)$ tiene dos componentes conexas (rotaciones y reflexiones).

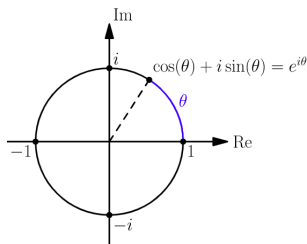
Ejemplo: El grupo ortogonal especial

$$\begin{aligned} SO(n) &= \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\} \\ &= \text{grupo de rotaciones de } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

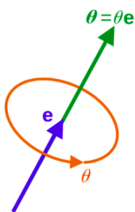
Caso $n = 2$:

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} : 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$$

$$\cong \{ e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi \} = \mathbb{S}^1$$



Caso $n = 3$: Todo elemento de $SO(3)$ está dado por un eje de rotación en \mathbb{R}^3 (dirigido) y un ángulo $-\pi \leq \theta \leq \pi$.



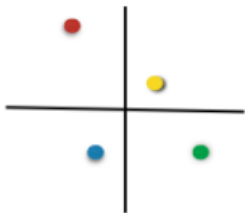
Como espacio topológico

$$SO(3) \approx \bar{B}(\vec{0}; \pi) / \vec{x} \sim \pm \vec{x} \\ \forall x \in \partial \bar{B} \\ = \mathbb{R}P^3$$

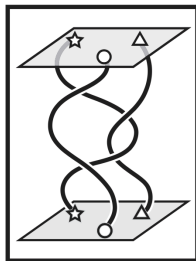
espacio proyectivo real, dim 3

Definición: El espacio de configuraciones de n puntos distintos en X

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_n(X) &= \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \mid x_i \neq x_j\} \\ &= \left(\prod_{i=1}^n X \right) - \Delta\end{aligned}$$



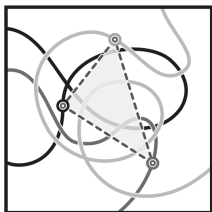
Un punto en $\mathcal{C}_4(\mathbb{R}^2)$



Una trayectoria en $\mathcal{C}_3(\mathbb{R}^2)$

Problema abierto: Dada una variedad M , describir la topología del espacio $\mathcal{C}_n(M)$

Ejemplo (Alineamiento de faros) Tres vehículos recorren trayectorias suaves en \mathbb{R}^2 . ¿Que tan frecuentemente sus posiciones son colineales?



Función que calcula el área

$$f : \mathcal{C}_3(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(v_1, v_2, v_3) = \det[v_2 - v_1; v_3 - v_1]$$

- $0 \in \mathbb{R}$ valor regular de f
- $W = f^{-1}(0)$ subvariedad de $\mathcal{C}_3(\mathbb{R}^2)$ de dimensión

$$\dim W = \dim \mathcal{C}_3(\mathbb{R}^2) - \dim \mathbb{R} = 6 - 1 = 5$$

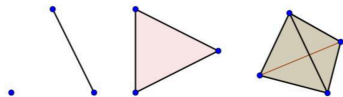
- **Tres trayectorias:** función continua $\gamma : \mathbb{R}_{\text{tiempo}} \rightarrow \mathcal{C}_3(\mathbb{R}^2)$

$$\dim \mathbb{R} - \dim \gamma^{-1}(W) = \dim \mathcal{C}_3(\mathbb{R}^2) - \dim W$$

Por tanto esperamos colinealidad en un **conjunto discreto** de tiempos.

Complejos Simpliciales

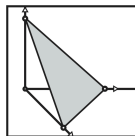
Definición: Un **complejo simplicial** K es un espacio que consiste de puntos, segmentos, triángulos y simplejos en dims. > 3 , tales que:



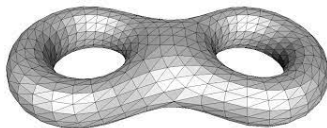
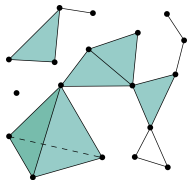
1. Si σ es un simplejo de K , sus caras pertenecen a K .
2. Si dos simplejos de K se intersectan, su intersección es una cara común.

El **simplejo estándar** de dim k

$$\Delta^k = \left\{ x \in \mathbb{R}^{k+1} : \sum_{i=0}^k x_i = 1, \quad x_i \geq 0 \right\}$$



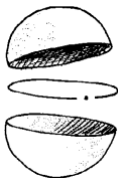
Ejemplos:



Complejos Celulares

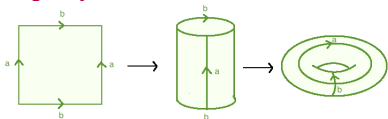
Definición: Un **complejo celular** es un espacio que se construye a partir de un conjunto (discreto) de puntos pegando celdas (o células) $\sigma^n \approx D^n$ de dims. $n = 0, 1, 2, \dots$

Ejemplo:

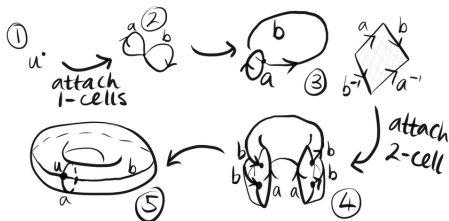


$$\mathbb{S}^2 = \sigma^0 \cup \sigma^1 \cup (\sigma_\alpha^2 \cup \sigma_\beta^2)$$

Ejemplo:



$$\mathbb{T}^2 = \sigma^0 \cup (\sigma_a^1 \cup \sigma_b^1) \cup \sigma^2$$



Característica de Euler:

Definición: Si $X = \cup_{\alpha} \sigma_{\alpha}$ es un complejo simplicial (o celular), definimos la característica de Euler de X

$$\chi(X) = \sum_k (-1)^k (\text{núm. de celdas de dim. } k)$$

Ejemplo: Si X es una superficie compacta o un poliedro $\chi(X) = V - A + C$



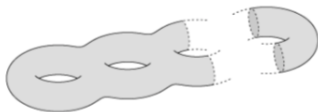
Superficies orientables compactas








$$\chi(\mathbb{S}^2) = 2$$



$$\chi(\mathbb{T}^2) = 0$$



$$\chi(S_g) = 2 - 2g$$

Nombre	Imagen	Vértices V	Aristas A	Caras C	Característica de Euler: $V - A + C$
Tetraedro		4	6	4	2
Cubo		8	12	6	2
Octaedro		6	12	8	2
Dodecaedro		20	30	12	2
Icosaedro		12	30	20	2

- La superficie S de un poliedro convexo es homeomorfa a \mathbb{S}^2 .
- S es un poliedro de tipo (p, q) si
 p = núm. de aristas de cada cara
 q = núm. de caras que se encuentran en cada vértice.

Teorema: Existen únicamente cinco poliedros regulares.

Demostración: Si S es un poliedro regular de tipo (p, q) , entonces:

$$V = \frac{pC}{q} = \left(\frac{p}{q}\right) \frac{2A}{p} = \frac{2A}{q}$$

$$A = \frac{pC}{2}$$

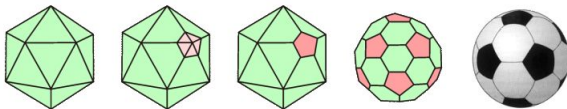
$$C = \frac{2A}{p}$$

$$\frac{2A}{q} - A + \frac{2A}{p} = 2$$

$$A \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$$

Ejemplo: ¿Cuántos pentágonos tiene un balón de fútbol?



$$V = \frac{5p + 6h}{3}$$

$$A = \frac{5p + 6h}{2}$$

$$C = p + h$$

$$\left(\frac{5p + 6h}{3}\right) - \left(\frac{5p + 6h}{2}\right) + (p + h) = 2$$

$$2(5p + 6h) - 3(5p + 6h) + 6(p + h) = 12$$

$$(10p + 12h) - (15p + 18h) + (6p + 6h) = 12$$

$$p = 12$$

Fullerenos:



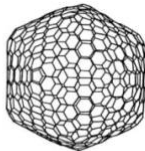
C₆₀



C₇₀



C₂₄₀



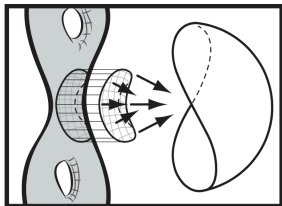
C₅₄₀

Tienen 12 pentágonos

Ejemplo (Curvatura) $M \subset \mathbb{R}^3$ superficie suave. El **mapeo de Gauss** $\gamma : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ asocia a todo punto de M el vector unitario normal a M .

$$D\gamma_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{S}^2 = T_p M$$

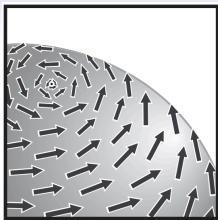
- **Curvatura de Gauss:** $\kappa_p = \det(D\gamma_p)$
- κ es un dato geométrico: invariante bajo rotaciones y traslaciones.
- Estirar o deformar M **cambian** κ .



Teorema (Gauss-Bonnet) Si $M \subset \mathbb{R}^3$ superficie compacta, orientada suave, entonces la integral de la curvatura de Gauss está dada por:

$$\int_M \kappa \, dA = 2\pi \cdot \chi(M)$$

Dem: Ver **M. do Carmo**; *Differential Geometry of Curves and Surfaces*.

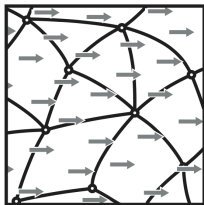


Teorema (Campos Vectoriales) M variedad compacta conexa sin frontera posee un campo vectorial $\neq 0$ si y solo si $\chi(M) = 0$.

Nota: En dims 1 y 3 todas las variedades compactas tienen $\chi(M) = 0$.

Dem: Sup. M compacta, dim. n , que admite un campo $V \neq 0$. Ponemos una estructura celular sobre M con celdas suficientemente pequeñas, transversales a V . $\forall \sigma$ sea $I(\sigma) =$ colección de caras de σ en las que V apunta al interior de σ .

- $I(\sigma) \neq \emptyset$ (por transversalidad) y contiene
- el interior de σ (\approx interior del disco D^n) y
- algunas caras de la frontera (cuya unión \approx a D^{n-1})

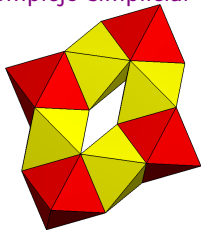


Así $\chi(I(\sigma)) = (-1)^n + (-1)^{n-1} = 0$ y como los $I(\sigma)$ forman una partición de todas las celdas

$$\chi(M) = \sum_{\sigma} \chi(I(\sigma)) = 0.$$

Grupos de Homología

Complejo simplicial



X

Cadenas en dim. n : Para $n = 0, 1, 2, \dots$

$C_n(X)$ = grupo abeliano libre generado por los n -simplejos de X

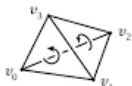
Operador frontera:

$$\partial : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$$

$$\partial[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0]$$



$$\partial[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$$



$$\begin{aligned} \partial[v_0, v_1, v_2, v_3] = & [v_1, v_2, v_3] - [v_0, v_2, v_3] \\ & + [v_0, v_1, v_3] - [v_0, v_1, v_2] \end{aligned}$$

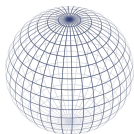
$$\partial[v_0, \dots, v_n] = \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, v_{i-1}, \widehat{v}_i, v_{i+1}, \dots, v_n]$$

$$\dots \xrightarrow{\partial_4} C_3(X) \xrightarrow{\partial_3} C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$$

Grupos de Homología: $H_n(X) = \frac{\ker(\partial_n)}{\text{im}(\partial_{n+1})} = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)}$

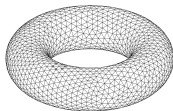
Homología de superficies



$$H_0 = \mathbb{Z}$$

$$H_1 = 0$$

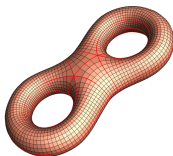
$$H_2 = \mathbb{Z}$$



$$H_0 = \mathbb{Z}$$

$$H_1 = \mathbb{Z}^2$$

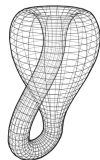
$$H_2 = \mathbb{Z}$$



$$H_0 = \mathbb{Z}$$

$$H_1 = \mathbb{Z}^4$$

$$H_2 = \mathbb{Z}$$



$$H_0 = \mathbb{Z}$$

$$H_1 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$$

$$H_2 = 0$$

Ejemplo: Homología de la esfera \mathbb{S}^n

$$H_q(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0 \\ \mathbb{Z} & \text{si } q = n \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Fórmulas de Künneth:

$$H_n(X \times Y) \cong \bigoplus_{p+q=n} H_p(X) \otimes H_q(Y) \oplus \bigoplus_{i+j=n-1} \text{Tor}(H_i(X), H_j(Y))$$

Observación: Toda función continua $f : X \rightarrow Y$ induce un homomorfismo

$$f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$$

Propiedades:

- La identidad $id : X \rightarrow X$ induce $(id)_* : H_n(X) \rightarrow H_n(X)$.
- Si $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X) & \xrightarrow{f_*} & H_n(Y) & \xrightarrow{g_*} & H_n(Z) \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & (g \circ f)_* \end{array}$$

Teorema (del punto fijo de Brower)

Toda función continua $g : D^2 \rightarrow D^2$ tiene un punto fijo, **i.e.** existe $x_0 \in D^2$ tal que $g(x_0) = x_0$.



Dem: Supongamos que $g : D^2 \rightarrow D^2$ no tiene puntos fijos, i.e. $g(x) \neq x$, $\forall x \in D^2$. Consideremos el rayo de $g(x)$ a x y sea $h(x)$ su intersección con S^1 . Entonces:

- $h : D^2 \rightarrow S^1$ es continua
- $h(x) = x$, $\forall x \in S^1$

De la topología

$$\begin{array}{ccccc} S^1 & \xrightarrow{i} & D^2 & \xrightarrow{h} & S^1 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & id_{S^1} & & \end{array}$$

$$\xrightarrow{H_1}$$

al álgebra

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{h_*} & \mathbb{Z} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & id_{\mathbb{Z}} & & \end{array}$$

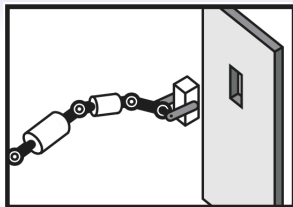
¡Contradicción!

Ejemplo: Cinemática inversa

Dado un brazo robot con espacio de configuraciones $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$
el **mapeo cinemático**

$$\kappa : \mathbb{T}^n \rightarrow SO(3)$$

manda una sucesión de rotaciones en la **orientación neta** del extremo del brazo.



Pregunta: ¿Se puede invertir el mapeo κ ?

Proposición: No existe $s : SO(3) \rightarrow \mathbb{T}^n$ continuo tal que $s \circ \kappa = id_{\mathbb{T}^n}$

Dem: Supongamos que tal s existe

$$\begin{array}{ccccc} & & id_{\mathbb{T}^n} & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ \mathbb{T}^n & \xrightarrow{\kappa} & SO(3) & \xrightarrow{s} & \mathbb{T}^n \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & id & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ H_1(\mathbb{T}^n) & \xrightarrow{\kappa_*} & H_1 SO(3) & \xrightarrow{s_*} & H_1(\mathbb{T}^n) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & id & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{\kappa_*} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{s_*} & \mathbb{Z}^n \quad \#c \end{array}$$

Homología Persistente

TDA (Análisis Topológico de Datos)

Ejemplo: Códigos de barras

$$H_0 = \mathbb{Z}^9$$

$$H_0 = \mathbb{Z}^3$$

$$H_0 = \mathbb{Z}^3$$

$$H_0 = \mathbb{Z}^3$$

$$H_0 = \mathbb{Z}$$

$$H_0 = \mathbb{Z}$$

$$H_1 = 0$$

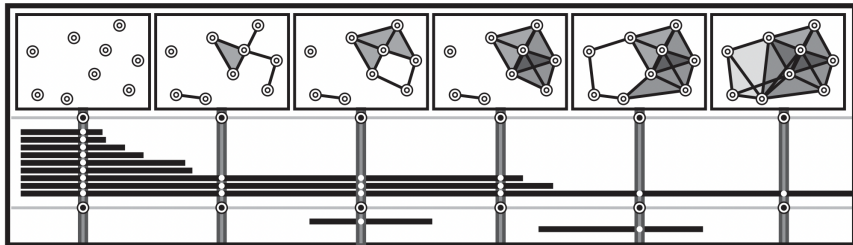
$$H_1 = 0$$

$$H_1 = \mathbb{Z}$$

$$H_1 = 0$$

$$H_1 = \mathbb{Z}$$

$$H_1 = 0$$



Homología Persistente

Aplicación: Subgrupos de diabetes tipo 2 a través de análisis topológico



Referencias

1. M.do Carmo; *Differential Topology of Curves and Surfaces*
2. M.Greenberg, J.Harper; *Algebraic Topology: A First Course*. CRC Press.
3. V.Guillemin, A.Pollack *Differential Topology*. Amer. Math. Soc.
4. A.Hatcher; *Algebraic Topology*. Cambridge University Press.
5. K.Jänich; *Topology*. Springer.
6. K.Jänich; *Vector Analysis*. Springer.
7. R.Jiménez, M.Xicoténcatl; *Configuration Spaces and Braid Groups*.
Snapshots of modern mathematics from Oberwolfach (2019), no. 11.
8. J.Rotman; *An Introduction to Algebraic Topology*. Springer.

La mayoría de las figuras fueron tomadas de:

9. R.Ghrist; *Elementary Applied Topology*.

Para saber más: xico@math.cinvestav.mx