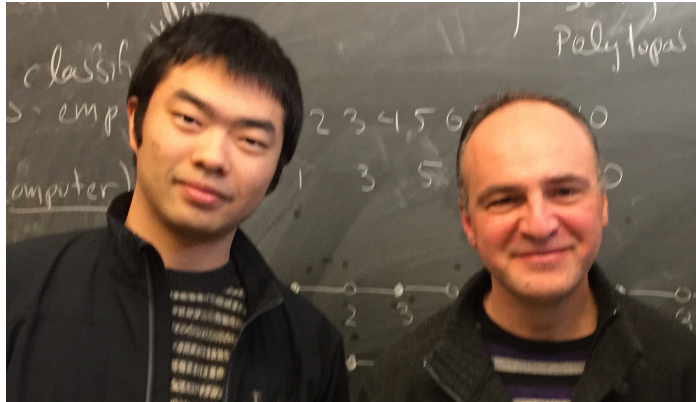


Problemas
Matemáticos
Provenientes del

Método Simplex

Jesús A. De Loera
Coloquio CINVESTAV

Joint work with **Christos Athanasiadis** and **Zhenyang Zhang**, Moise Blanchard and Quentin Louveaux, **Laura Sanità** and **Sean Kafer**, **Alex Black**.



LA HISTORIA QUE LES VOY A CONTAR...

-**Optimización** es una rama vibrante de las Matemáticas Aplicadas. La meta es maximizar o minimizar una *función objetivo* sobre un conjunto de soluciones posibles! E.g., *Maximizar la ganancia, Minimizar el error, etc.* De preferencia usando computadoras...

Problemas de Optimización provienen de la ingeniería, administración y logística, las finanzas, bioinformática, ciencias de la computación, y mas recientemente, la inteligencia artificial. Cualquier area donde hay que tomar la “*mejor decisión*” o la “*solución óptima*”

LA HISTORIA QUE LES VOY A CONTAR...

Optimización es una rama vibrante de las Matemáticas Aplicadas. La meta es maximizar o minimizar una *función objetivo* sobre un conjunto de soluciones posibles! E.g., *Maximizar la ganancia, Minimizar el error, etc.* De preferencia usando computadoras...

Problemas de Optimización provienen de la ingeniería, administración y logística, las finanzas, bioinformática, ciencias de la computación, y mas recientemente, la inteligencia artificial. Cualquier area donde hay que tomar la “*mejor decisión*” o la “*solución óptima*”

LA HISTORIA QUE LES VOY A CONTAR...

Optimización es una rama vibrante de las Matemáticas Aplicadas. La meta es maximizar o minimizar una *función objetivo* sobre un conjunto de soluciones posibles! E.g., *Maximizar la ganancia, Minimizar el error, etc.* De preferencia usando computadoras...

Problemas de Optimización provienen de la ingeniería, administración y logística, las finanzas, bioinformática, ciencias de la computación, y mas recientemente, la inteligencia artificial. Cualquier area donde hay que tomar la “*mejor decisión*” o la “*solución óptima*”

LA HISTORIA QUE LES VOY A CONTAR...

Optimización es una rama vibrante de las Matemáticas Aplicadas. La meta es maximizar o minimizar una *función objetivo* sobre un conjunto de soluciones posibles! E.g., *Maximizar la ganancia, Minimizar el error, etc.* De preferencia usando computadoras...

Problemas de Optimización provienen de la ingeniería, administración y logística, las finanzas, bioinformática, ciencias de la computación, y mas recientemente, la inteligencia artificial. Cualquier area donde hay que tomar la “*mejor decisión*” o la “*solución óptima*”

Esta charla es sobre como usar

Geometría Algebraica y Topología para entender y
mejorar algoritmos de **Optimización**

LA HISTORIA QUE LES VOY A CONTAR...

Optimización es una rama vibrante de las Matemáticas Aplicadas. La meta es maximizar o minimizar una *función objetivo* sobre un conjunto de soluciones posibles! E.g., *Maximizar la ganancia, Minimizar el error, etc.* De preferencia usando computadoras...

Problemas de Optimización provienen de la ingeniería, administración y logística, las finanzas, bioinformática, ciencias de la computación, y mas recientemente, la inteligencia artificial. Cualquier area donde hay que tomar la “*mejor decisión*” o la “*solución óptima*”

Esta charla es sobre como usar

Geometría Algebraica y Topología para entender y

mejorar algoritmos de **Optimización**

¿ Es esta mezcla extraña? ¡ Voy a convencerlos que no!

El problema de Optimización lineal

$$\text{minimizar } c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_dx_d$$

Subject to:

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,d}x_d \leq b_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,d}x_d \leq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,d}x_d \leq b_n$$

El problema de Optimización lineal

$$\text{minimizar } c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_dx_d$$

Subject to:

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,d}x_d \leq b_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,d}x_d \leq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,d}x_d \leq b_n$$

$a_{i,j}, b_i, c_j$ son números racionales, n es el número de desigualdades, d número de variables. La gente le llama **programa lineal**

El problema de Optimización lineal

$$\text{minimizar } c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_dx_d$$

Subject to:

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,d}x_d \leq b_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,d}x_d \leq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,d}x_d \leq b_n$$

$a_{i,j}, b_i, c_j$ son números racionales, n es el número de desigualdades, d número de variables. La gente le llama **programa lineal** notación con matrices:

$$\min\{ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \}.$$

El problema de Optimización lineal

$$\text{minimizar } c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_dx_d$$

Subject to:

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,d}x_d \leq b_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,d}x_d \leq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,d}x_d \leq b_n$$

Agregando/cambio de variables re-escribimos el sistema

$$\text{Minimizar } \mathbf{q}^T \mathbf{y} \text{ subject to } B\mathbf{y} = \mathbf{d} \text{ and } \mathbf{y} \geq 0;$$

Optimización Lineal



Algebra Lineal sobre números reales NON-NEGATIVOS

El problema de Optimización lineal

$$\text{minimizar } c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_dx_d$$

Subject to:

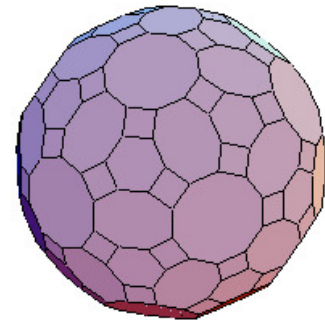
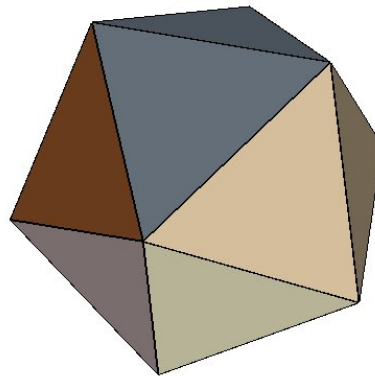
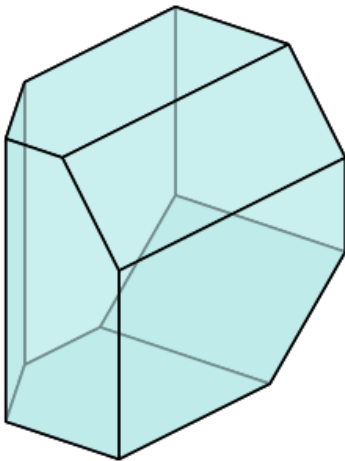
$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,d}x_d \leq b_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,d}x_d \leq b_2$$

$$\vdots$$

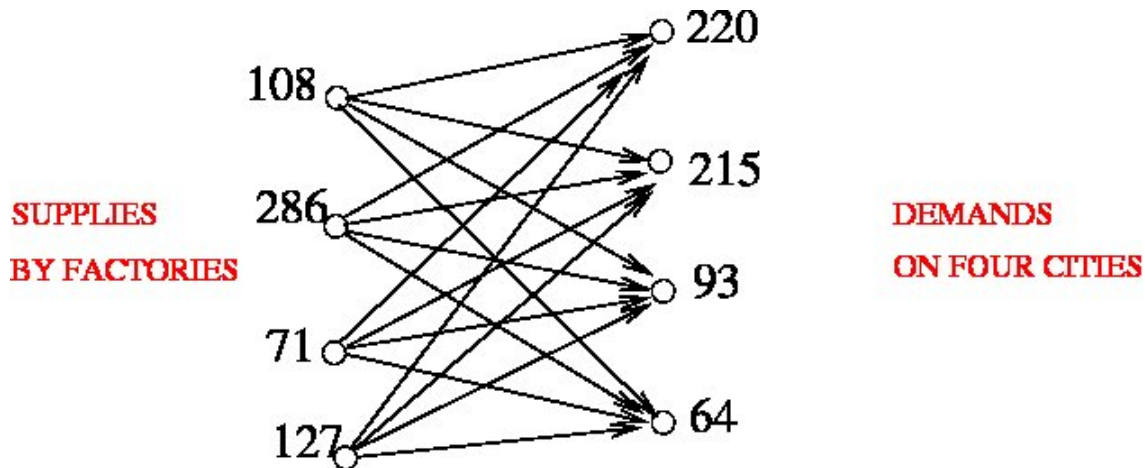
$$a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,d}x_d \leq b_n$$

IMPORTANTE: Las soluciones posibles son un **políhedro convexo**,



EJEMPLO: TRANSPORTE OPTIMO EN REDES

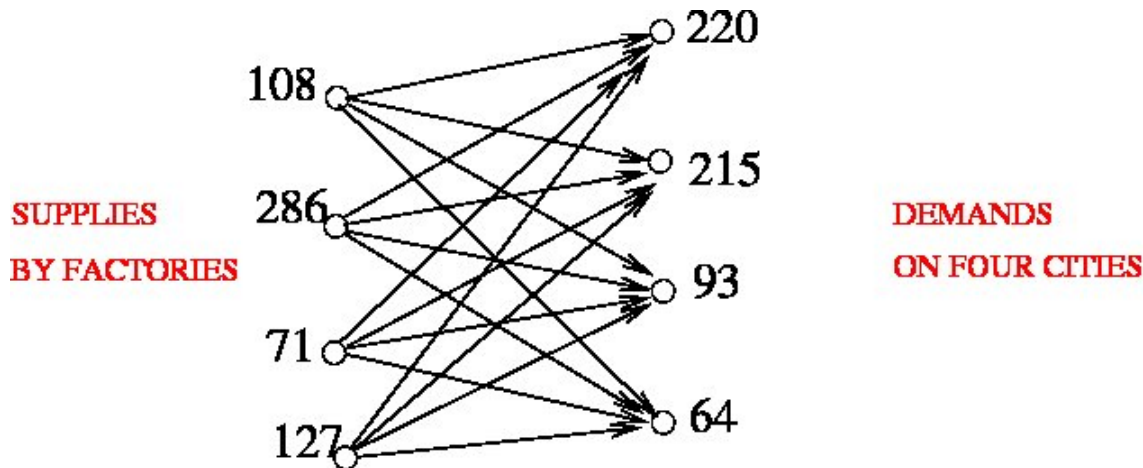
Problema de Transporte : N_1 centros de producción and N_2 sitios de consumo. Tiene costo $c_{i,j}$ de transportar mercancía de centro de producción i al sitio de consumo j .



¿ Cual es la manera de asignar rutas de transporte que minimize el costo?

EJEMPLO: TRANSPORTE OPTIMO EN REDES

Problema de Transporte : N_1 centros de producción and N_2 sitios de consumo. Tiene costo $c_{i,j}$ de transportar mercancía de centro de producción i al sitio de consumo j .



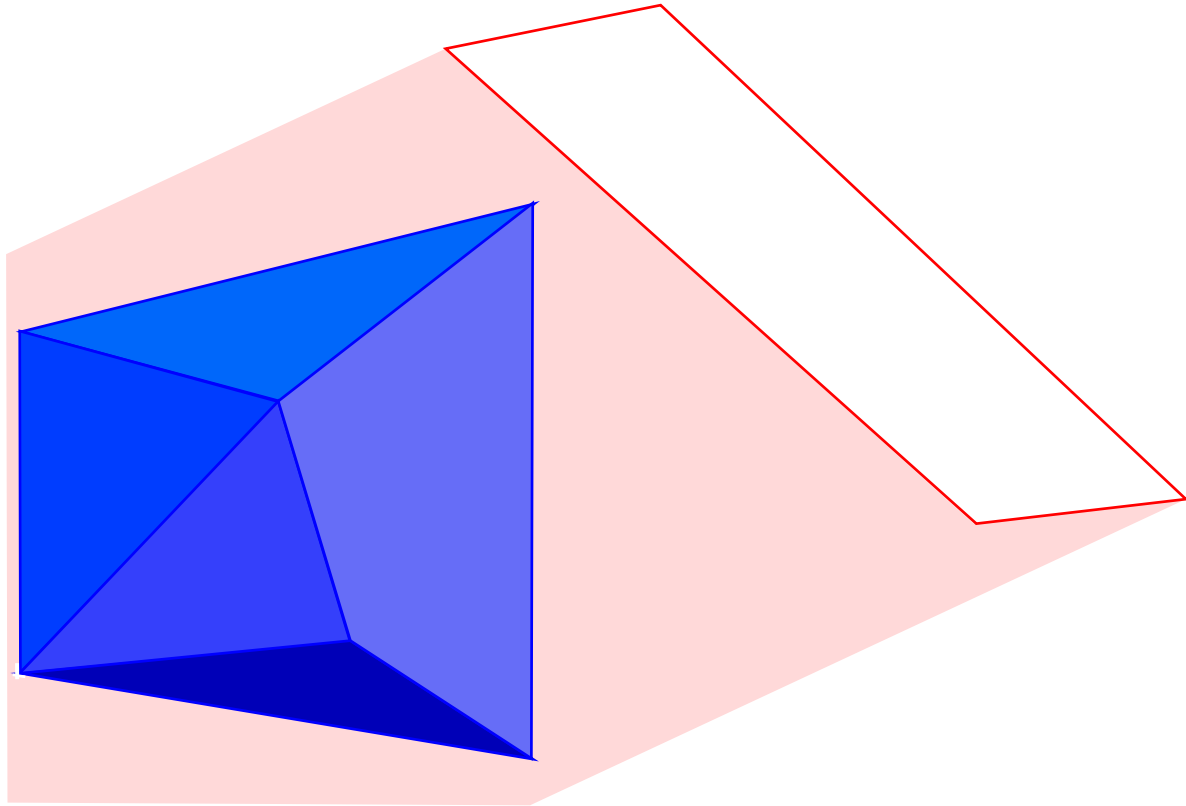
¿ Cual es la manera de asignar rutas de transporte que minimize el costo?

- Historia: Monge (1781) Kantorovich (1939) Koopmans (1941), von Neumann (1947).
- Aplicaciones: Distancia de Wasserstein, Contingency tables.

ANATOMÍA DE UN POLITOPO P

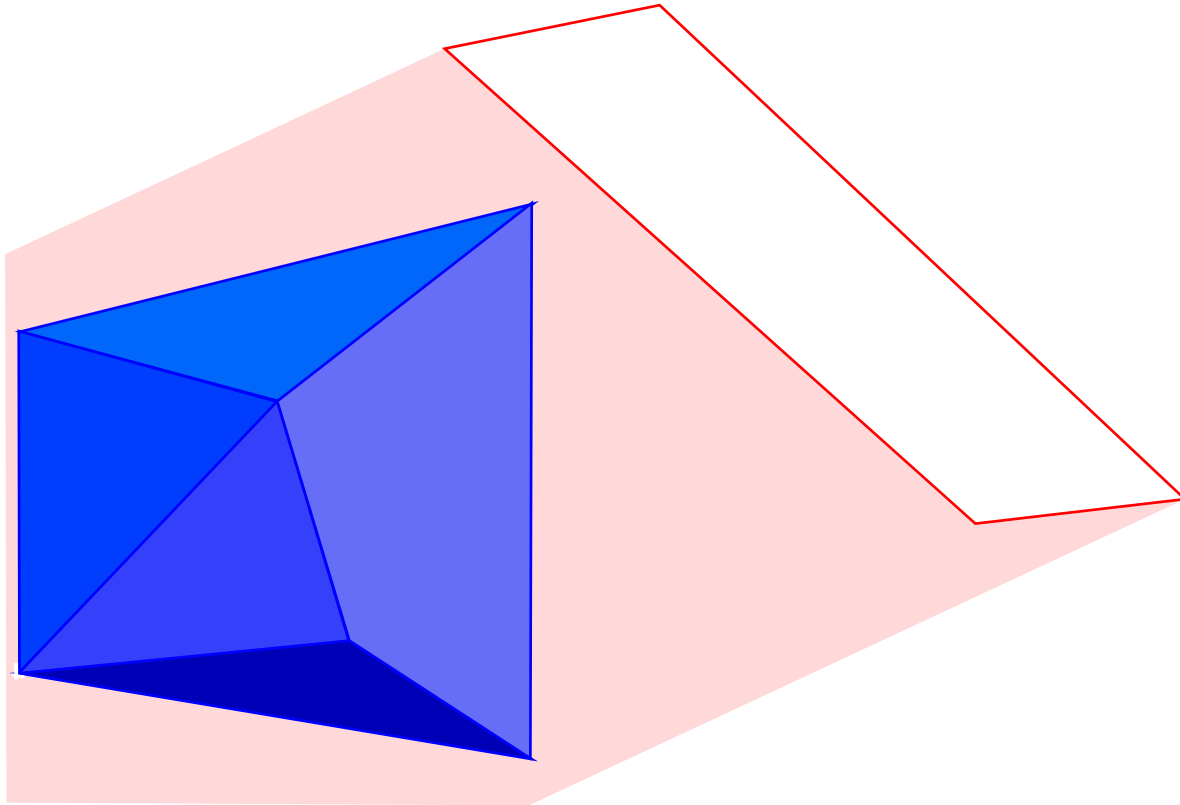
Let P be a d -politopo. Se compone de politopos de menor dimensiones (caras!)

ANATOMÍA DE UN POLITOPO P



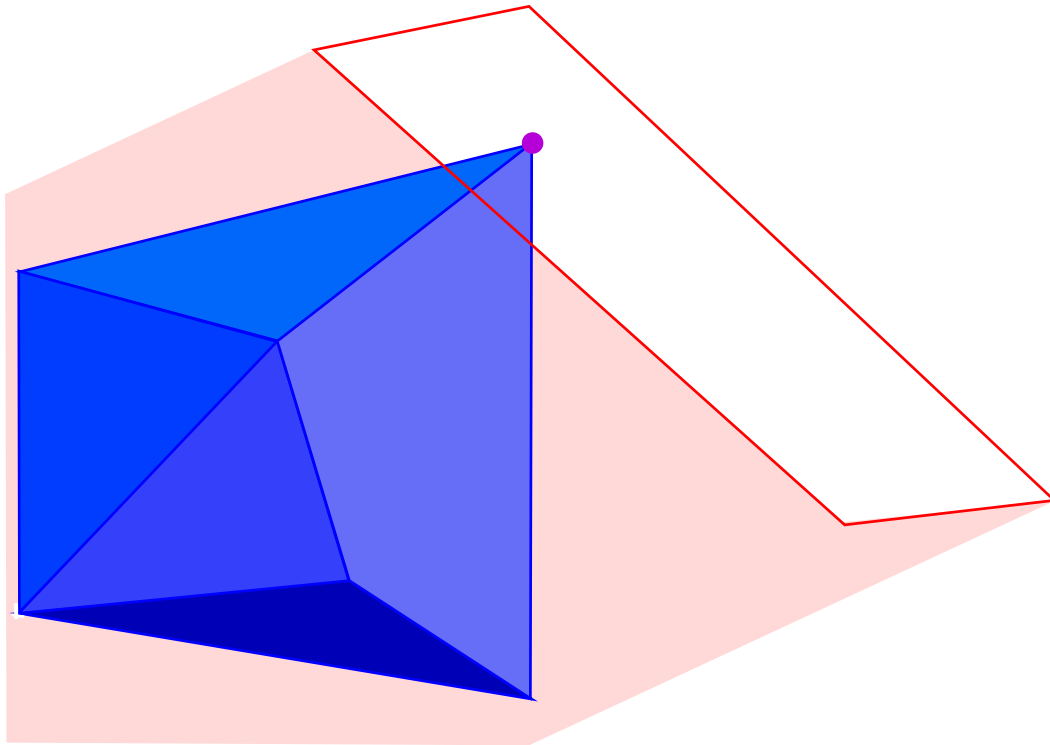
ANATOMÍA DE UN POLITOPO P

Una **cara** F de P esta determinada por un hiperplano H is $\partial H \cap P$.

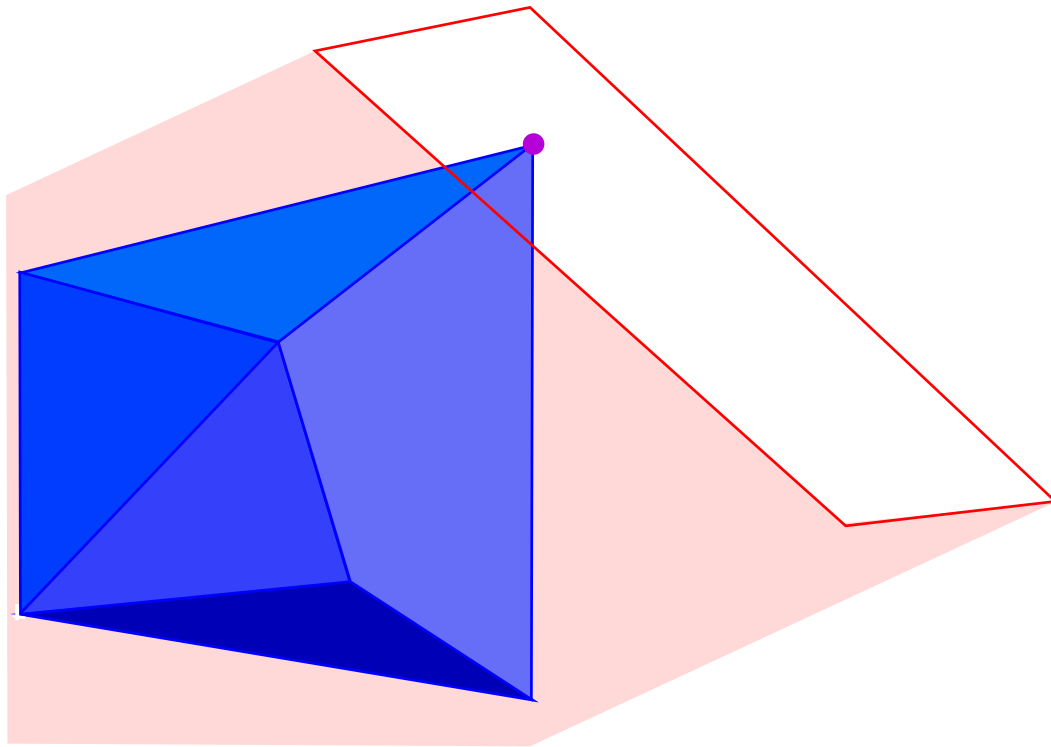


ANATOMÍA DE UN POLITOPO P

Una **cara** F de P esta determinada por un hiperplano H is $\partial H \cap P$.

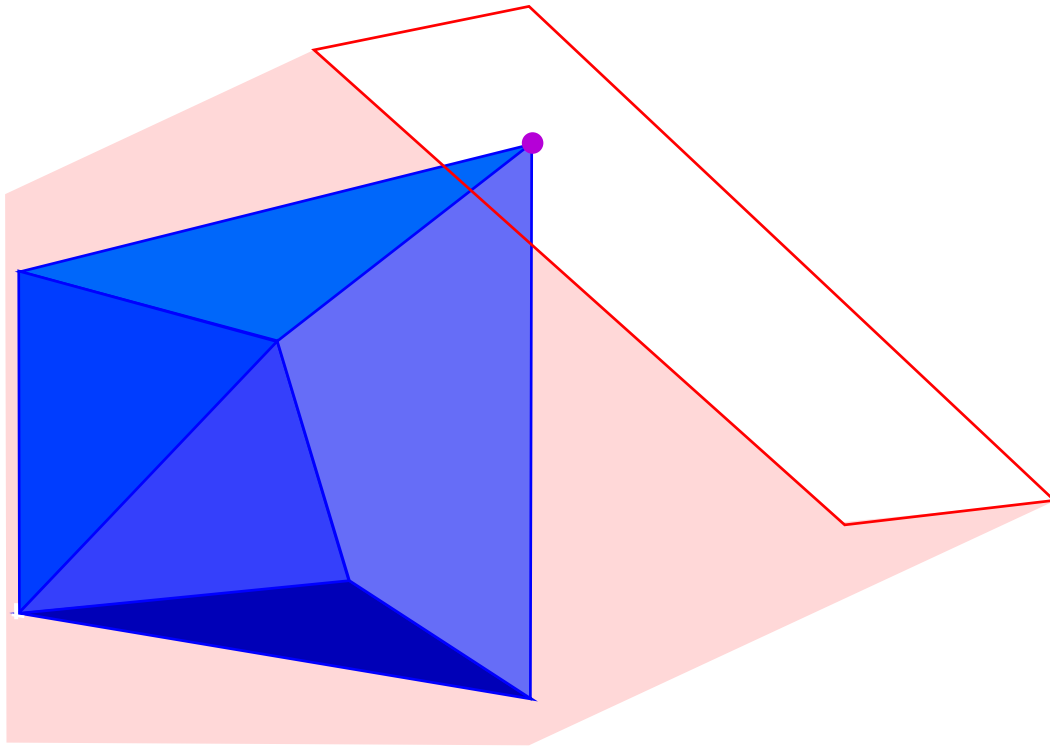


ANATOMÍA DE UN POLITOPO P



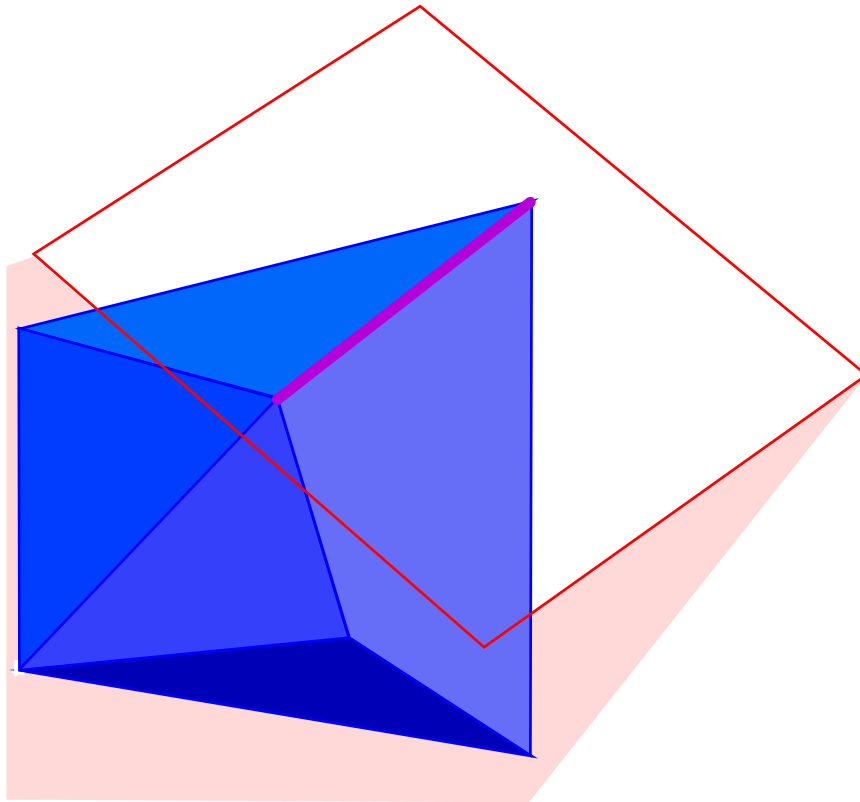
ANATOMÍA DE UN POLITOPO P

Caras de dimensión 0 son **vertices**.



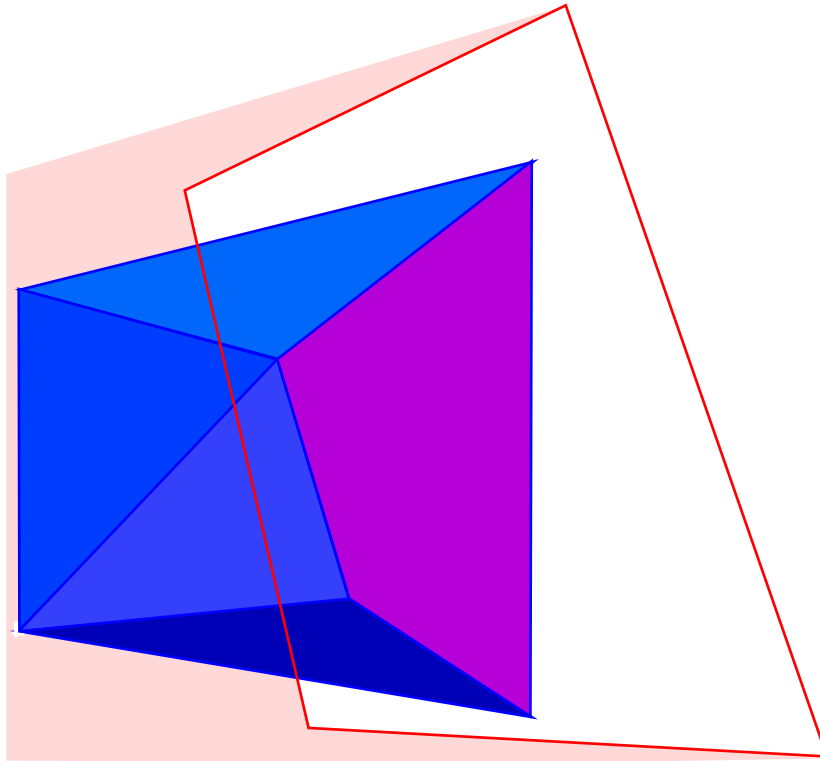
ANATOMÍA DE UN POLITOPO P

Caras de dimensión 1 son **aristas**. Los vertices y las aristas of P forman una gráfica ó **1-esqueleto** $G(P)$ of P .



ANATOMÍA DE UN POLITOPO P

Caras of dimension $d - 1$ are called **facetas**.



- La Optimization lineal es muy importante
 - Es un modelo matemático muy expresivo, además de transportacion tenemos
 - camino mas corto en una red, planeación optima
 - teoría de gráficas y de juegos,
 - Problemas de regresion estadística, etc.
 - Aplicaciones
 - Procesamiento de sen ales e imagenes,
 - Conjetura de Kepler,
 - La optimización lineal es el caballo de batalla para solución o aproximación de problemas mas difíciles combinatorios o non-lineales.
- Varios algoritmos posibles: Hoy voy a platicarles del método SIMPLEX

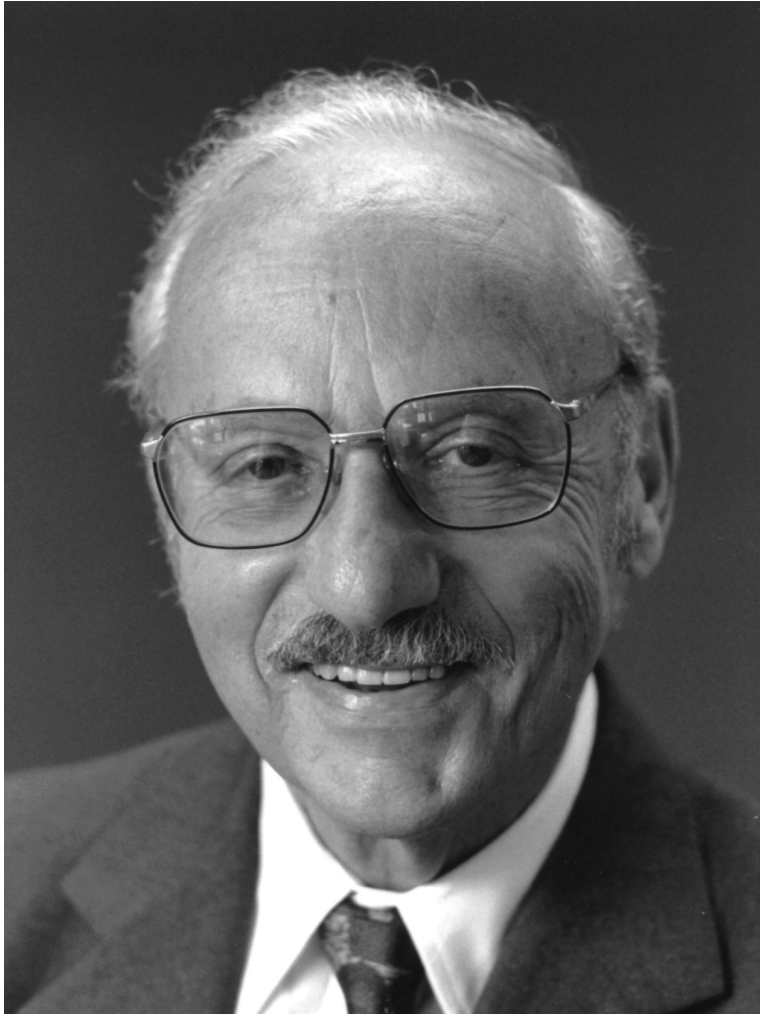
- La Optimization lineal es muy importante
 - Es un modelo matemático muy expresivo, además de transportacion tenemos
 - camino mas corto en una red, planeación optima
 - teoría de gráficas y de juegos,
 - Problemas de regresion estadística, etc.
 - Aplicaciones
 - Procesamiento de sen ales e imagenes,
 - Conjetura de Kepler,
 - La optimización lineal es el caballo de batalla para solución o aproximación de problemas mas difíciles combinatorios o non-lineales.
- Varios algoritmos posibles: Hoy voy a platicarles del método SIMPLEX

- La Optimization lineal es muy importante
 - Es un modelo matemático muy expresivo, además de transportacion tenemos
 - camino mas corto en una red, planeación optima
 - teoría de gráficas y de juegos,
 - Problemas de regresion estadística, etc.
 - Aplicaciones
 - Procesamiento de sen ales e imagenes,
 - Conjetura de Kepler,
 - La optimización lineal es el caballo de batalla para solución o aproximación de problemas mas difíciles combinatorios o non-lineales.
- Varios algoritmos posibles: Hoy voy a platicarles del método SIMPLEX

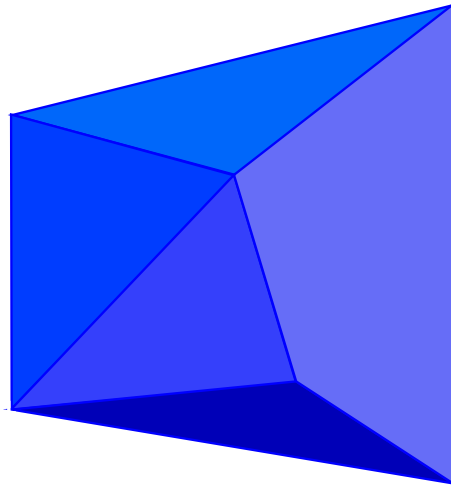
- La Optimization lineal es muy importante
 - Es un modelo matemático muy expresivo, además de transportacion tenemos
 - camino mas corto en una red, planeación optima
 - teoría de gráficas y de juegos,
 - Problemas de regresion estadística, etc.
 - Aplicaciones
 - Procesamiento de sen ales e imagenes,
 - Conjetura de Kepler,
 - La optimización lineal es el caballo de batalla para solución o aproximación de problemas mas difíciles combinatorios o non-lineales.
- Varios algoritmos posibles: Hoy voy a platicarles del método SIMPLEX

EL MÉTODO SIMPLEX

George Dantzig, inventor del método (1947)

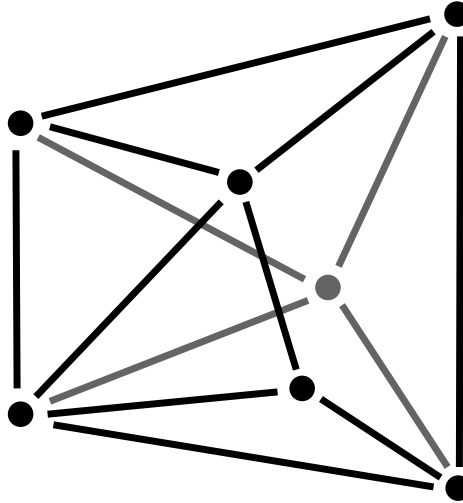


Los vertices y aristas de un politopo P forman una gráfica $G(P)$



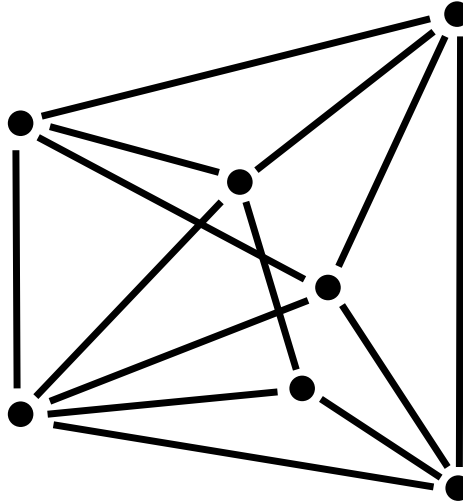
- La **distancia** $d(v_1, v_2)$ entre un par de vértices v_1 and v_2 es el número de aristas en un camino mas corto de v_1 a v_2 .
- Ejemplo, $d(v_1, v_2) = 2$.
- The **diámetro** $\delta = \max\{d(v_1, v_2) : v_1, v_2 \in V\}$ es la máxima distancia sobre todos pares de vértices.

Los vertices y aristas de un politopo P forman una gráfica $G(P)$



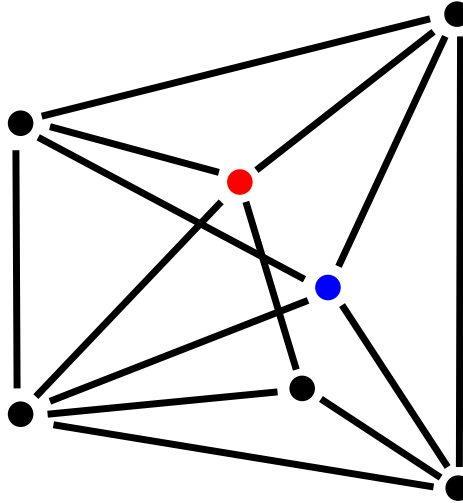
- La **distancia** $d(v_1, v_2)$ entre un par de vértices v_1 and v_2 es el número de aristas en un camino mas corto de v_1 a v_2 .
- Ejemplo, $d(v_1, v_2) = 2$.
- The **diámetro** $\delta = \max\{d(v_1, v_2) : v_1, v_2 \in V\}$ es la máxima distancia sobre todos pares de vértices.

Los vertices y aristas de un politopo P forman una gráfica $G(P)$



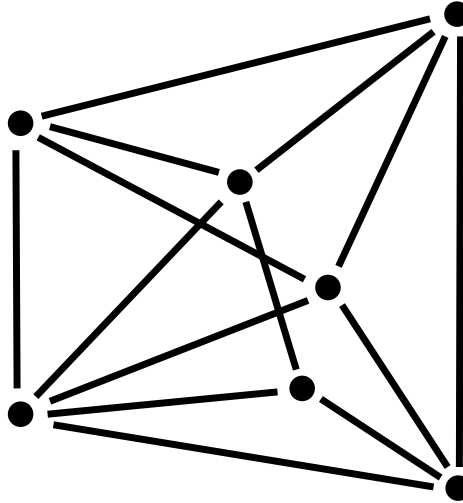
- La **distancia** $d(v_1, v_2)$ entre un par de vértices v_1 and v_2 es el número de aristas en un camino mas corto de v_1 a v_2 .
- Ejemplo, $d(v_1, v_2) = 2$.
- The **diámetro** $\delta = \max\{d(v_1, v_2) : v_1, v_2 \in V\}$ es la máxima distancia sobre todos pares de vértices.

Los vertices y aristas de un politopo P forman una gráfica $G(P)$



- La **distancia** $d(v_1, v_2)$ entre un par de vértices v_1 and v_2 es el número de aristas en un camino mas corto de v_1 a v_2 .
- Ejemplo, $d(v_1, v_2) = 2$.
- The **diámetro** $\delta = \max\{d(v_1, v_2) : v_1, v_2 \in V\}$ es la máxima distancia sobre todos pares de vértices.

Los vertices y aristas de un politopo P forman una gráfica $G(P)$



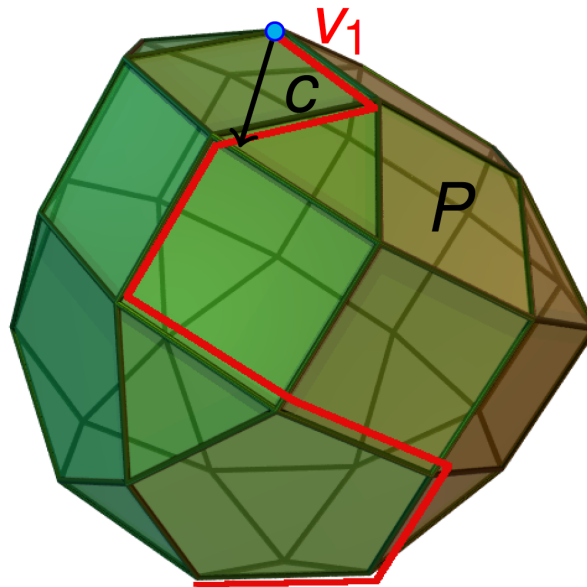
- La **distancia** $d(v_1, v_2)$ entre un par de vértices v_1 and v_2 es el número de aristas en un camino mas corto de v_1 a v_2 .
- Ejemplo, $d(v_1, v_2) = 2$.
- The **diámetro** $\delta = \max\{d(v_1, v_2) : v_1, v_2 \in V\}$ es la máxima distancia sobre todos pares de vértices.

EL MÉTODO SIMPLEX EN 2 MINUTOS

- **Lema:** Si hay una solución optima entonces hay una que está en un vértice. Solo hay un número finito de posibilidades.

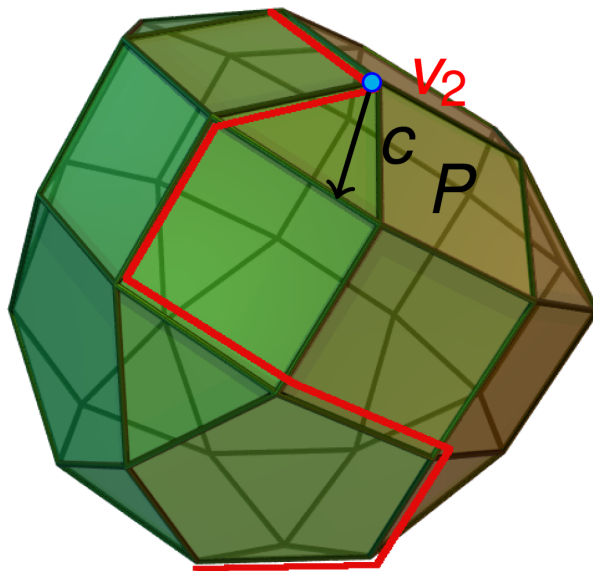
EL MÉTODO SIMPLEX EN 2 MINUTOS

- **Lema:** Si hay una solución óptima entonces hay una que está en un vértice. Solo hay un número finito de posibilidades.
- El método Simplex **camina** sobre la gráfica $G(P)$, a cada paso va a un vértice de mejor valor



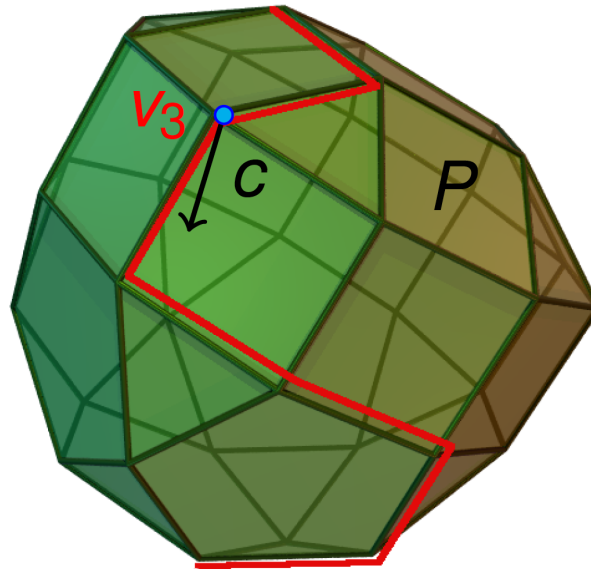
EL MÉTODO SIMPLEX EN 2 MINUTOS

- **Lema:** Si hay una solución óptima entonces hay una que está en un vértice. Solo hay un número finito de posibilidades.
- El método Simplex **camina** sobre la gráfica $G(P)$, a cada paso va a un vértice de mejor valor



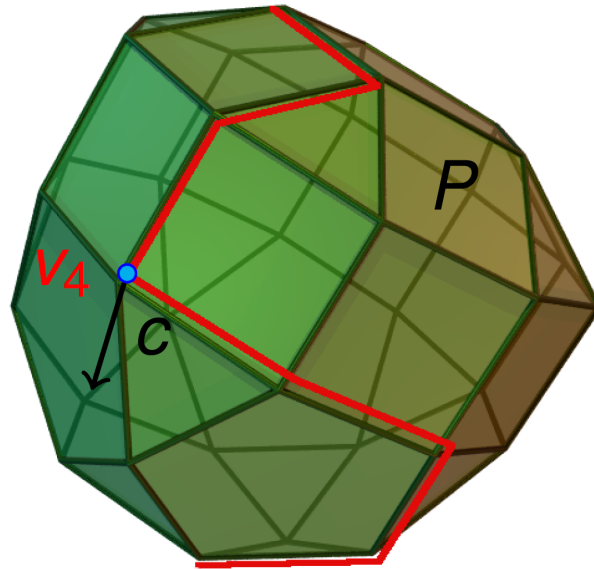
EL MÉTODO SIMPLEX EN 2 MINUTOS

- **Lema:** Si hay una solución óptima entonces hay una que está en un vértice. Solo hay un número finito de posibilidades.
- El método Simplex **camina** sobre la gráfica $G(P)$, a cada paso va a un vértice de mejor valor



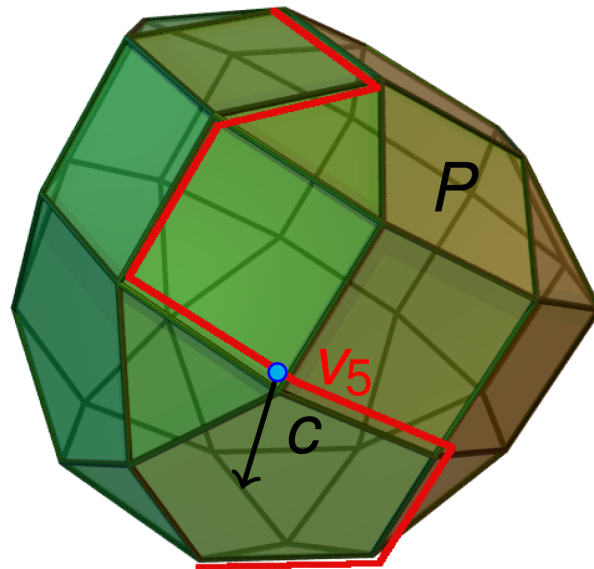
EL MÉTODO SIMPLEX EN 2 MINUTOS

- **Lema:** Si hay una solución óptima entonces hay una que está en un vértice. Solo hay un número finito de posibilidades.
- El método Simplex **camina** sobre la gráfica $G(P)$, a cada paso va a un vértice de mejor valor



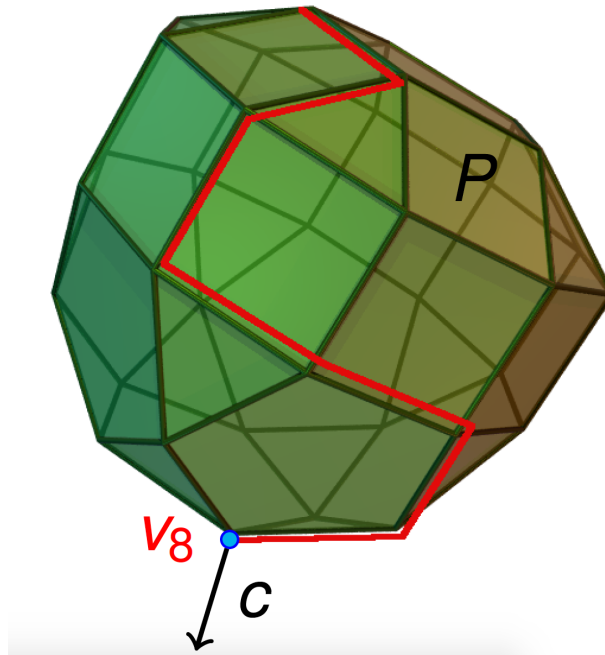
EL MÉTODO SIMPLEX EN 2 MINUTOS

- **Lema:** Si hay una solución óptima entonces hay una que está en un vértice. Solo hay un número finito de posibilidades.
- El método Simplex **camina** sobre la gráfica $G(P)$, a cada paso va a un vértice de mejor valor



EL MÉTODO SIMPLEX EN 2 MINUTOS

- **Lema:** Si hay una solución óptima entonces hay una que está en un vértice. Solo hay un número finito de posibilidades.
- El método Simplex **camina** sobre la gráfica $G(P)$, a cada paso va a un vértice de mejor valor



GRAN PREGUNTA

¿ Hay una versión
EFICIENTE del método
Simplex?

significa el número de pasos
es un polinomio en el tamaño
del problema

GRAN PREGUNTA:

¿Cuales son las cotas del diámetro de politopos?

PELIGRO: Si el diametro es exponencial, entonces el método simplex va a ser exponencial!

GRAN PREGUNTA:

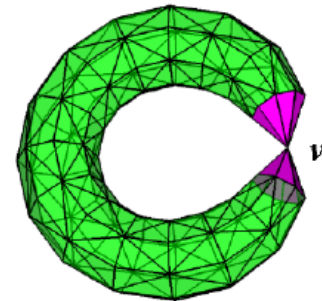
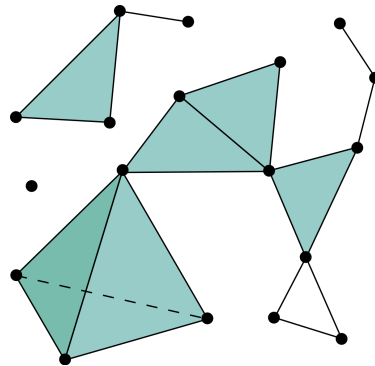
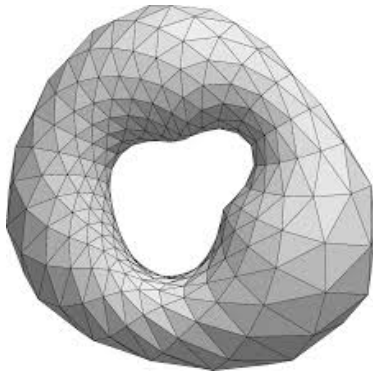
¿Cuales son las cotas del
diámetro de politopos?

PELIGRO: Si el diametro es exponencial, entonces
el método simplex va a ser exponencial!

PUNTO DE VISTA TOPOLÓGICO DEL MÉTODO SIMPLEX I

KEY IDEA: ¡Olvidar las coordenadas y ecuaciones! Usar la información topológica

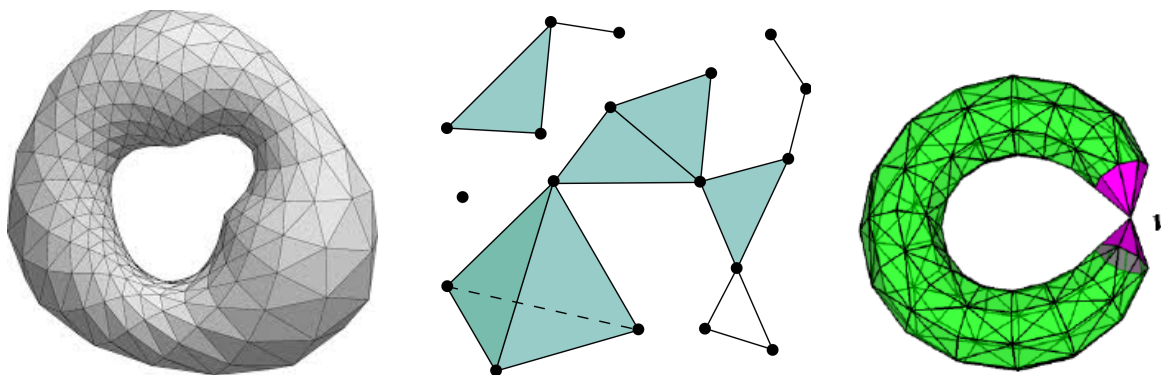
Diámetro de **complejos simpliciales** en lugar de politopos [Adler & Dantzig \(1970's\)](#)



PUNTO DE VISTA TOPOLÓGICO DEL MÉTODO SIMPLEX I

KEY IDEA: ¡Olvidar las coordenadas y ecuaciones! Usar la información topológica

Diámetro de **complejos simpliciales** en lugar de politopos [Adler & Dantzig \(1970's\)](#)

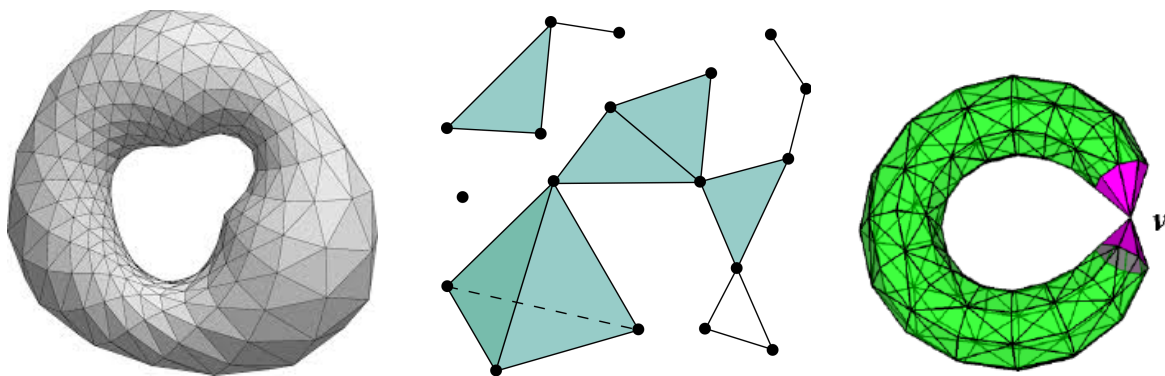


Un complejo simplicial K es una colección finita de [simplejos](#) pegados unos con otros de forma siguiente:

PUNTO DE VISTA TOPOLÓGICO DEL MÉTODO SIMPLEX I

KEY IDEA: ¡Olvidar las coordenadas y ecuaciones! Usar la información topológica

Diámetro de **complejos simpliciales** en lugar de polippos [Adler & Dantzig \(1970's\)](#)



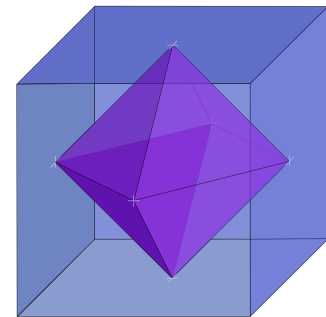
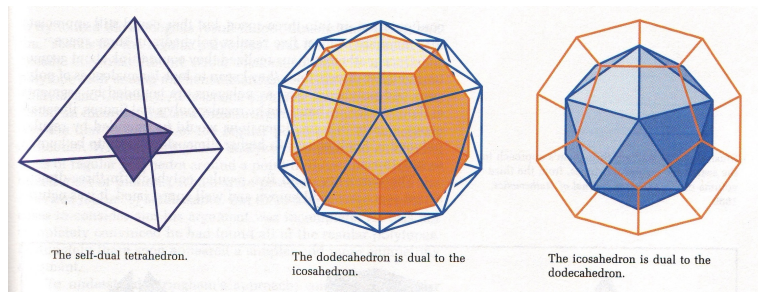
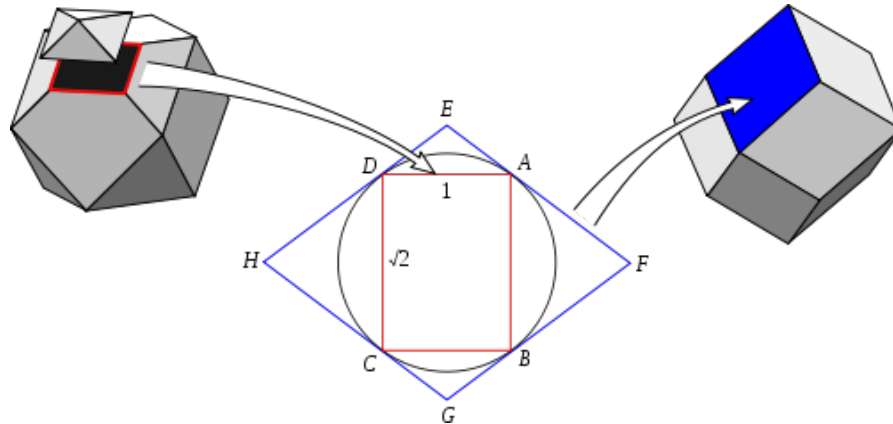
Un complejo simplicial K es una colección finita de [simplejos](#) pegados unos con otros de forma siguiente:

- a) Si $\sigma \in K$ entonces todas sus caras son simplejos en K .
- b) La intersección de dos simplejos en K es otro simplejo en K .

¿ Hace sentido esta abstracción?

PUNTO DE VISTA TOPOLÓGICO DEL MÉTODO SIMPLEX II

SI! A cada politopo convexo simple se puede asociar un complejo simplicial usando **POLARIDAD**

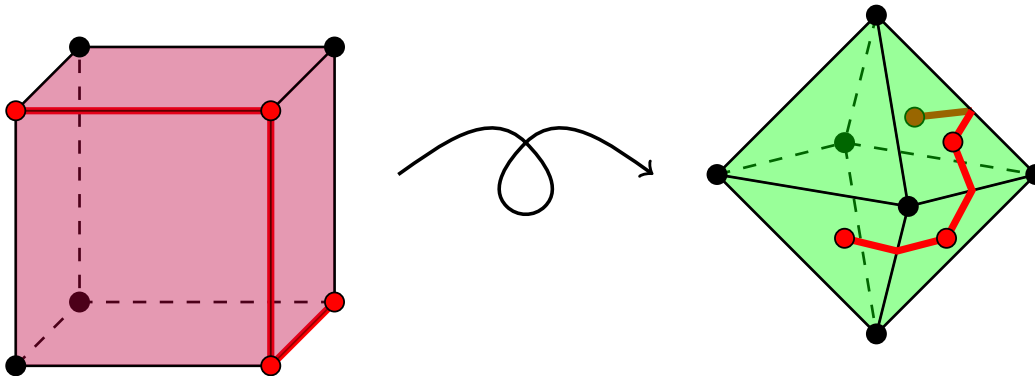


PUNTO DE VISTA TOPOLÓGICO DEL MÉTODO SIMPLEX

III

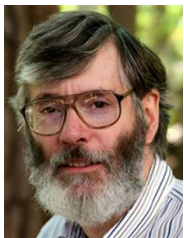
Reducimos el diámetro of LPs al diametro de complejos simpliciales

- La **distancia** entro dos simplejos, F_1, F_2 , es el numero menor de pasos de un camino simplicial de $F_1 = f_0, f_1, \dots, f_k = F_2$.
- El **diámetro** de un complejo simplicial es la máxima distancia entre un par de simplejos



COTAS PARA EL DIÁMETRO

- **Kalai-Kleitman:** $(\text{facetas}(P))^{\log(\dim(P))+1}$.



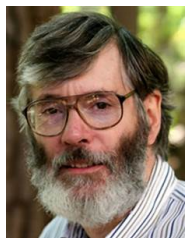
COTAS PARA EL DIÁMETRO

- Kalai-Kleitman: $(\text{facetas}(P))^{\log(\dim(P))+1}$.
- Todd, Sukegawa $(\text{facetas}(P) - \dim(P))^{\log(O(\frac{\dim(P)}{\log(\dim(P))}))}$



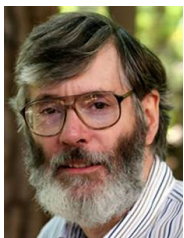
COTAS PARA EL DIÁMETRO

- **Kalai-Kleitman:** $(\text{facetas}(P))^{\log(\dim(P))+1}$.
- **Todd, Sukegawa** $(\text{facetas}(P) - \dim(P))^{\log(O(\frac{\dim(P)}{\log(\dim(P))}))}$
- **Barnette, Larman:** $\frac{2^{\dim(P)-3}}{3}(\text{facetas}(P) - \dim(P) + 5/2)$.



COTAS PARA EL DIÁMETRO

- **Kalai-Kleitman:** $(\text{facetas}(P))^{\log(\dim(P))+1}$.
- **Todd, Sukegawa** $(\text{facetas}(P) - \dim(P))^{\log(O(\frac{\dim(P)}{\log(\dim(P))}))}$
- **Barnette, Larman:** $\frac{2^{\dim(P)-3}}{3}(\text{facetas}(P) - \dim(P) + 5/2)$.



Teorema: Estas cotas funcionan para complejos simpliciales tambien
[Eisenbrand-Hähnle-Razborov-Rothvoss \(2010\)](#)

COMPLEJOS SIMPLICIALES DE GRAN DIÁMETRO

- **Teorema:** Santos (2012) Construyó ejemplos de politopos con el mayor diametro conocido pero aun lineal en el numero de vertices.



- **Theorem Criado and Santos (2015)** Complejos simpliciales pueden tener diámetro exponencial.
- **Conjetura de Hirsch:** Hay una polynomio $f(n, d)$ tal que todo politopo de dimension d con n facetas, tiene diámetro menor que $f(n, d)$.

COMPLEJOS SIMPLICIALES DE GRAN DIÁMETRO

- **Teorema:** Santos (2012) Construyó ejemplos de politopos con el mayor diametro conocido pero aun lineal en el numero de vertices.



- **Theorem Criado and Santos (2015)** Complejos simpliciales pueden tener diámetro exponencial.
- **Conjetura de Hirsch:** Hay una polynomio $f(n, d)$ tal que todo politopo de dimension d con n facetas, tiene diámetro menor que $f(n, d)$.

COMPLEJOS SIMPLICIALES DE GRAN DIÁMETRO

- **Teorema:** Santos (2012) Construyó ejemplos de politopos con el mayor diametro conocido pero aun lineal en el numero de vertices.



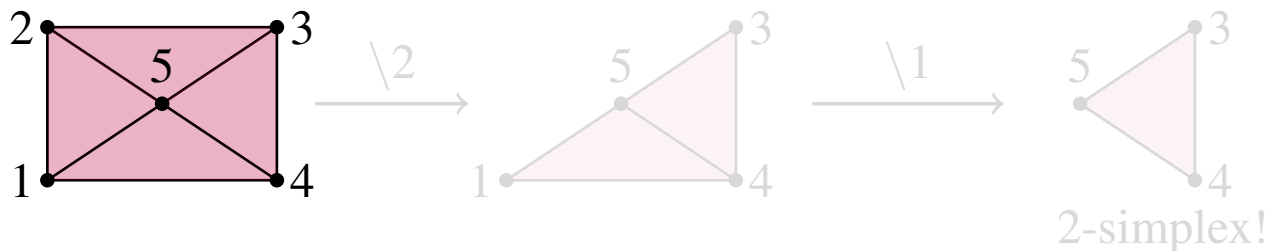
- **Theorem** Criado and Santos (2015) Complejos simpliciales pueden tener diámetro exponencial.
- **Conjetura de Hirsch:** Hay una polynomio $f(n, d)$ tal que todo politopo de dimension d con n facetas, tiene diámetro menor que $f(n, d)$.

COMPLEJOS SIMPLICIALES DESARMABLES TIENEN DIÁMETRO PEQUEÑO

DEFINITION

Un complejo simplicial d -dimensional Δ es **Desarmable** si

- 1 Todos los simplejos de dimension máxima son de dimension d y
- 2 Δ is a d -simplejo, o existe un vértice τ de Δ tal que $\Delta \setminus \tau$ is d -dimensional y desarmable.

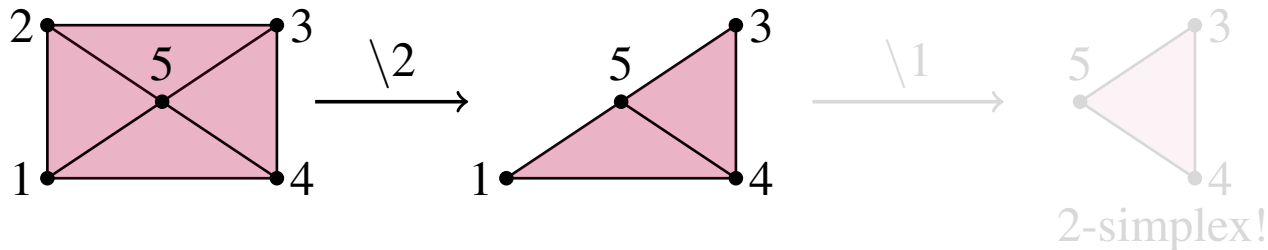


COMPLEJOS SIMPLICIALES DESARMABLES TIENEN DIÁMETRO PEQUEÑO

DEFINITION

Un complejo simplicial d -dimensional Δ es **Desarmable** si

- 1 Todos los simplejos de dimension máxima son de dimension d y
- 2 Δ is a d -simplejo, o existe un vértice τ de Δ tal que $\Delta \setminus \tau$ is d -dimensional y desarmable.

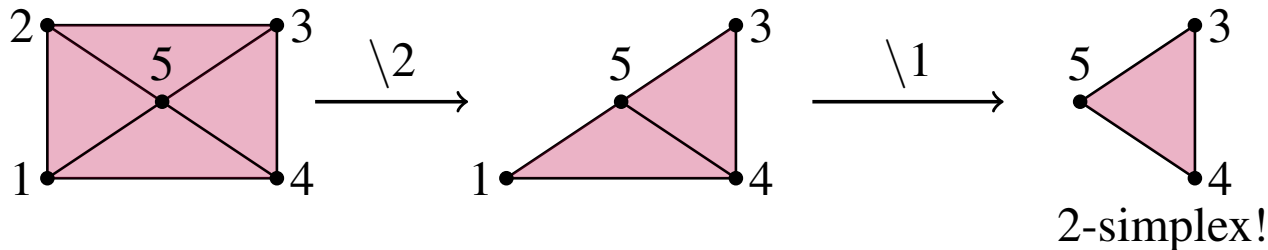


COMPLEJOS SIMPLICIALES DESARMABLES TIENEN DIÁMETRO PEQUEÑO

DEFINITION

Un complejo simplicial d -dimensional Δ es **Desarmable** si

- 1 Todos los simplejos de dimension máxima son de dimension d y
- 2 Δ is a d -simplejo, o existe un vértice τ de Δ tal que $\Delta \setminus \tau$ is d -dimensional y desarmable.

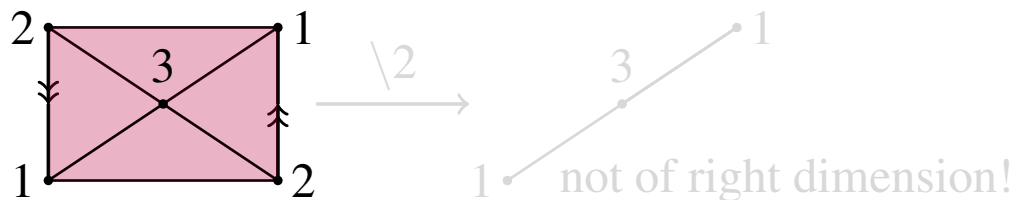
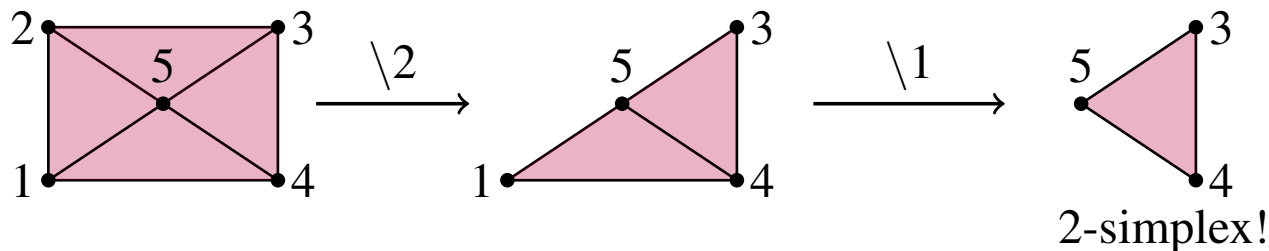


COMPLEJOS SIMPLICIALES DESARMABLES TIENEN DIÁMETRO PEQUEÑO

DEFINITION

Un complejo simplicial d -dimensional Δ es **Desarmable** si

- ① Todos los simplejos de dimension máxima son de dimension d y
- ② Δ is a d -simplejo, o existe un vértice τ de Δ tal que $\Delta \setminus \tau$ is d -dimensional y desarmable.

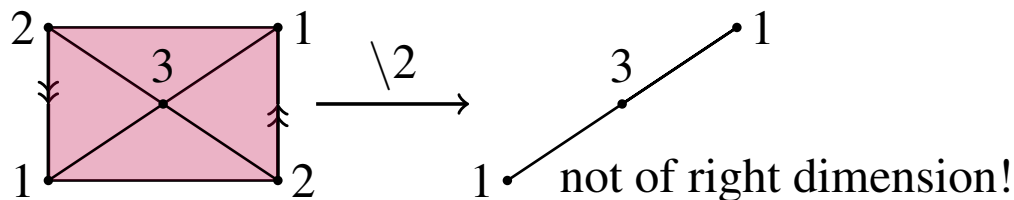
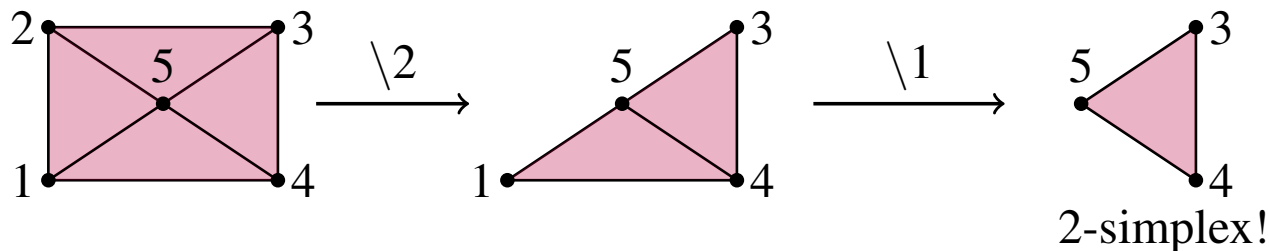


COMPLEJOS SIMPLICIALES DESARMABLES TIENEN DIÁMETRO PEQUEÑO

DEFINITION

Un complejo simplicial d -dimensional Δ es **Desarmable** si

- ① Todos los simplejos de dimension máxima son de dimension d y
- ② Δ is a d -simplejo, o existe un vértice τ de Δ tal que $\Delta \setminus \tau$ is d -dimensional y desarmable.



¿ PORQUÉ IMPORTA?

THEOREM (BILLERA, PROVAN, 1980)

Si Δ es desarmable entonces el diámetro es lineal ($n = f_0(\Delta)$):

$$\text{diam}(\Delta) \leq 2f_0(\Delta) = 2n.$$

¿ Cuáles politopos simpliciales son desarmables?

Teorema (JDL + S. Klee) Los politopos (duals) de transportación no son siempre desarmables!!

¿ PORQUÉ IMPORTA?

THEOREM (BILLERA, PROVAN, 1980)

Si Δ es desarmable entonces el diámetro es lineal ($n = f_0(\Delta)$):

$$\text{diam}(\Delta) \leq 2f_0(\Delta) = 2n.$$

¿ Cuáles politopos simpliciales son desarmables?

Teorema (JDL + S. Klee) Los politopos (duals) de transportación no son siempre desarmables!!

¿ PORQUÉ IMPORTA?

THEOREM (BILLERA, PROVAN, 1980)

Si Δ es desarmable entonces el diámetro es lineal ($n = f_0(\Delta)$):

$$\text{diam}(\Delta) \leq 2f_0(\Delta) = 2n.$$

¿ Cuáles politopos simpliciales son desarmables?

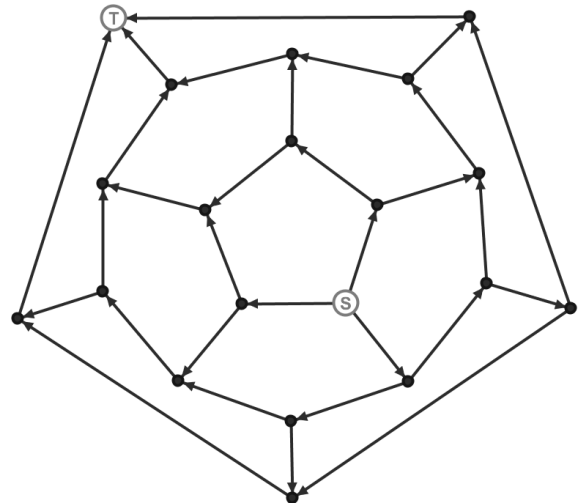
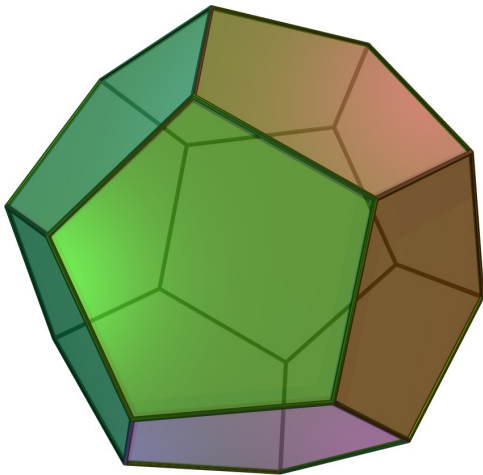
Teorema (JDL + S. Klee) Los politopos (duales) de transportación no son siempre desarmables!!

MONOTONE PATHS

- The **generic** linear functional c induces an orientation on the graph of P . Where edge joining v to u is oriented from v to u if $c^T v < c^T u$.

We call this directed graph $\omega(P, c)$.

- Note that $\omega(P, c)$ is acyclic and has a unique source $v_{\min}$ and a unique sink $v_{\max}$.

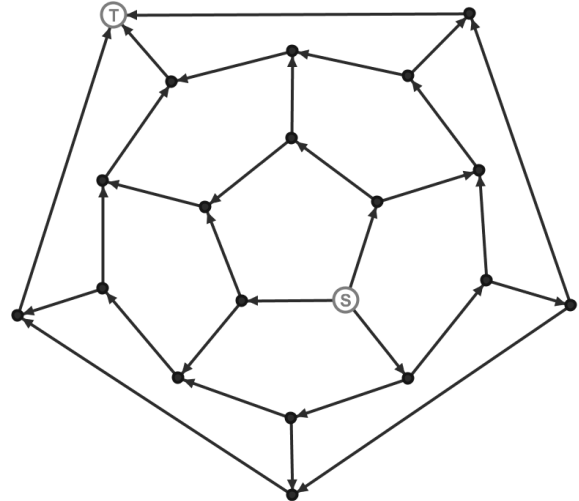
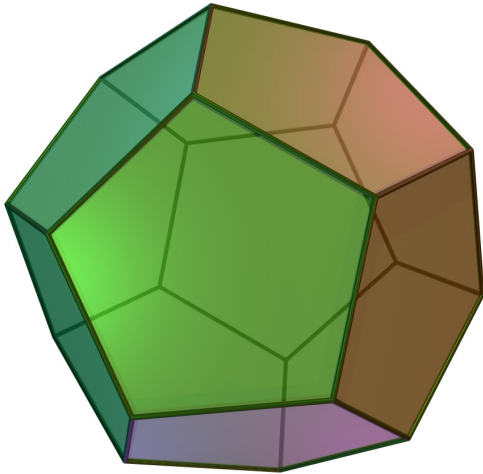


MONOTONE PATHS

- The **generic** linear functional c induces an orientation on the graph of P . Where edge joining v to u is oriented from v to u if $c^T v < c^T u$.

We call this directed graph $\omega(P, c)$.

- Note that $\omega(P, c)$ is acyclic and has a unique source $v_{\min}$ and a unique sink $v_{\max}$.

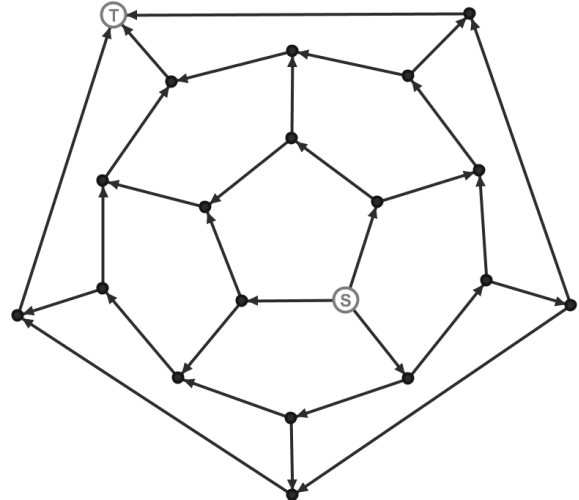
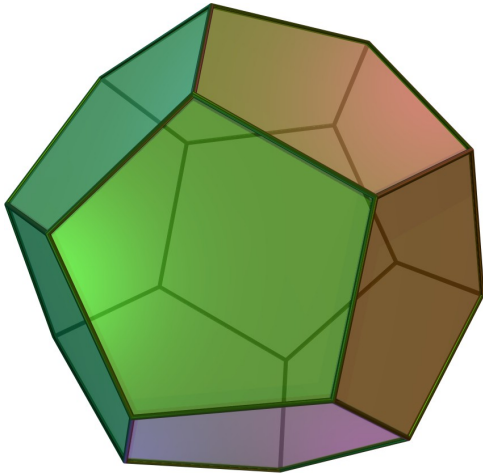


MONOTONE PATHS

- The **generic** linear functional c induces an orientation on the graph of P . Where edge joining v to u is oriented from v to u if $c^T v < c^T u$.

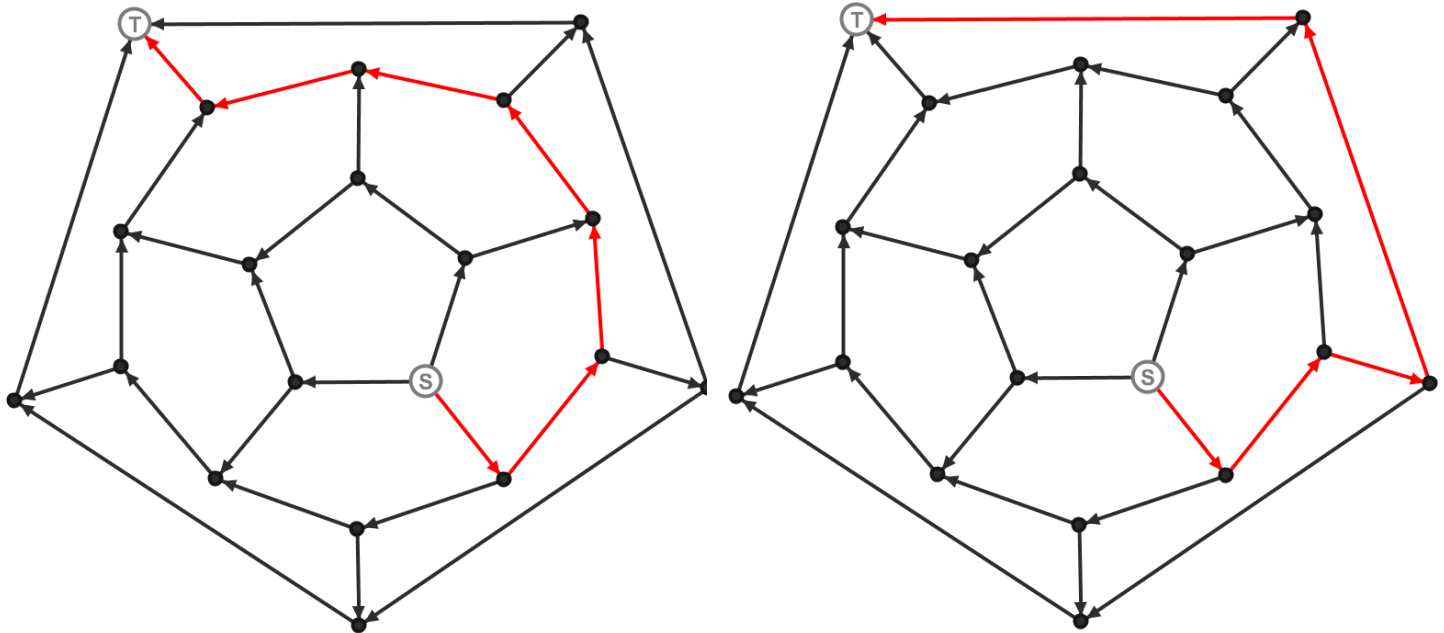
We call this directed graph $\omega(P, c)$.

- Note that $\omega(P, c)$ is acyclic and has a unique source $v_{\min}$ and a unique sink $v_{\max}$.



MONOTONE PATHS ON POLYTOPES

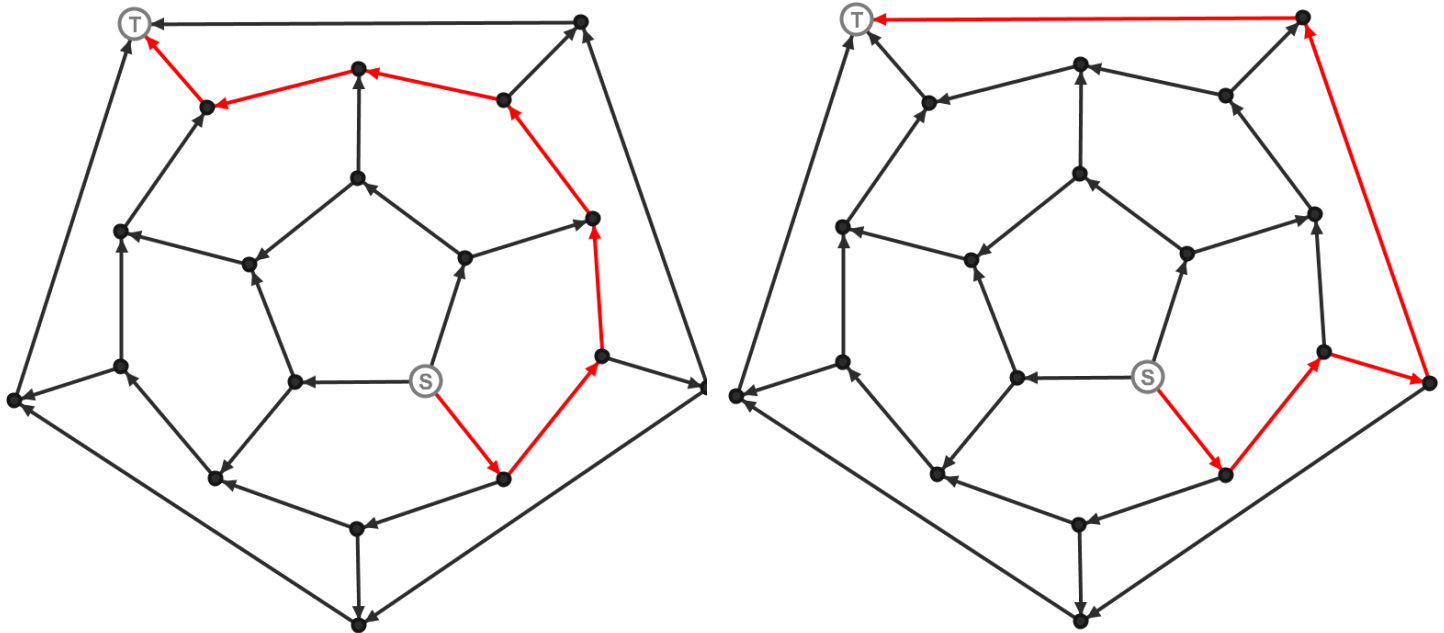
A **c -monotone path** on P is a directed path in $\omega(P, f)$ from $v_{\min}$ to $v_{\max}$.



NOTE: The lengths can change!!

MONOTONE PATHS ON POLYTOPES

A **c -monotone path** on P is a directed path in $\omega(P, f)$ from $v_{\min}$ to $v_{\max}$.



NOTE: The lengths can change!!

REMARKS

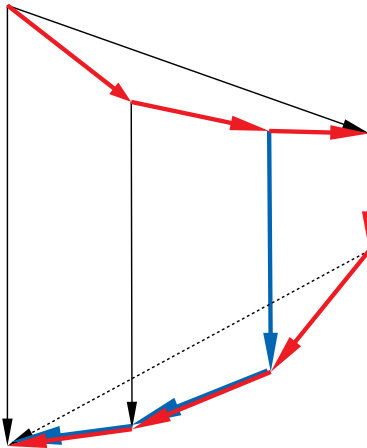


FIGURE: Monotone paths on the Klee–Minty cube.

(undirected) diameter $\leq$ monotone diameter $\leq$ height.

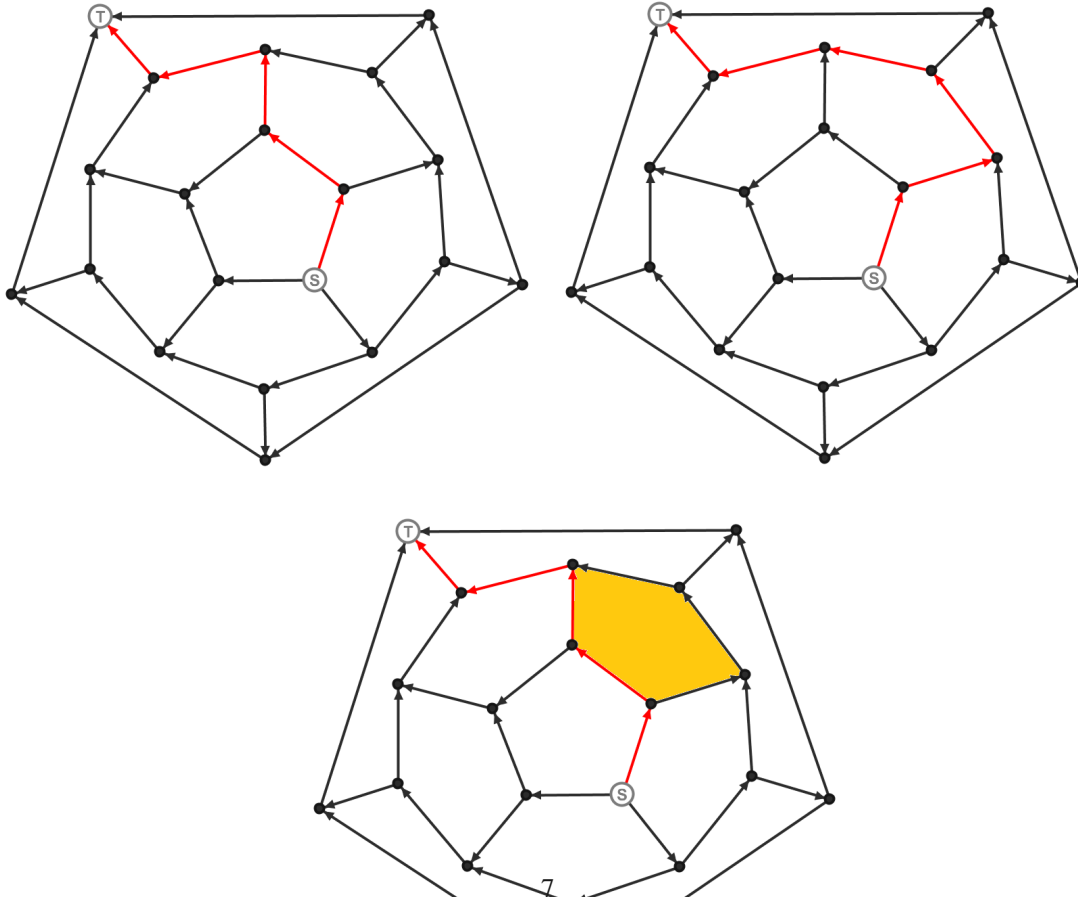
Hirsch conjecture (1957): $\text{diameter} \leq |\text{facets}| - \text{dimension}$.

-(undirected) Counter-example (F. Santos 2010), dimension 20.

-(directed monotone) Counter-example (M. Todd 1980), dimension 4.

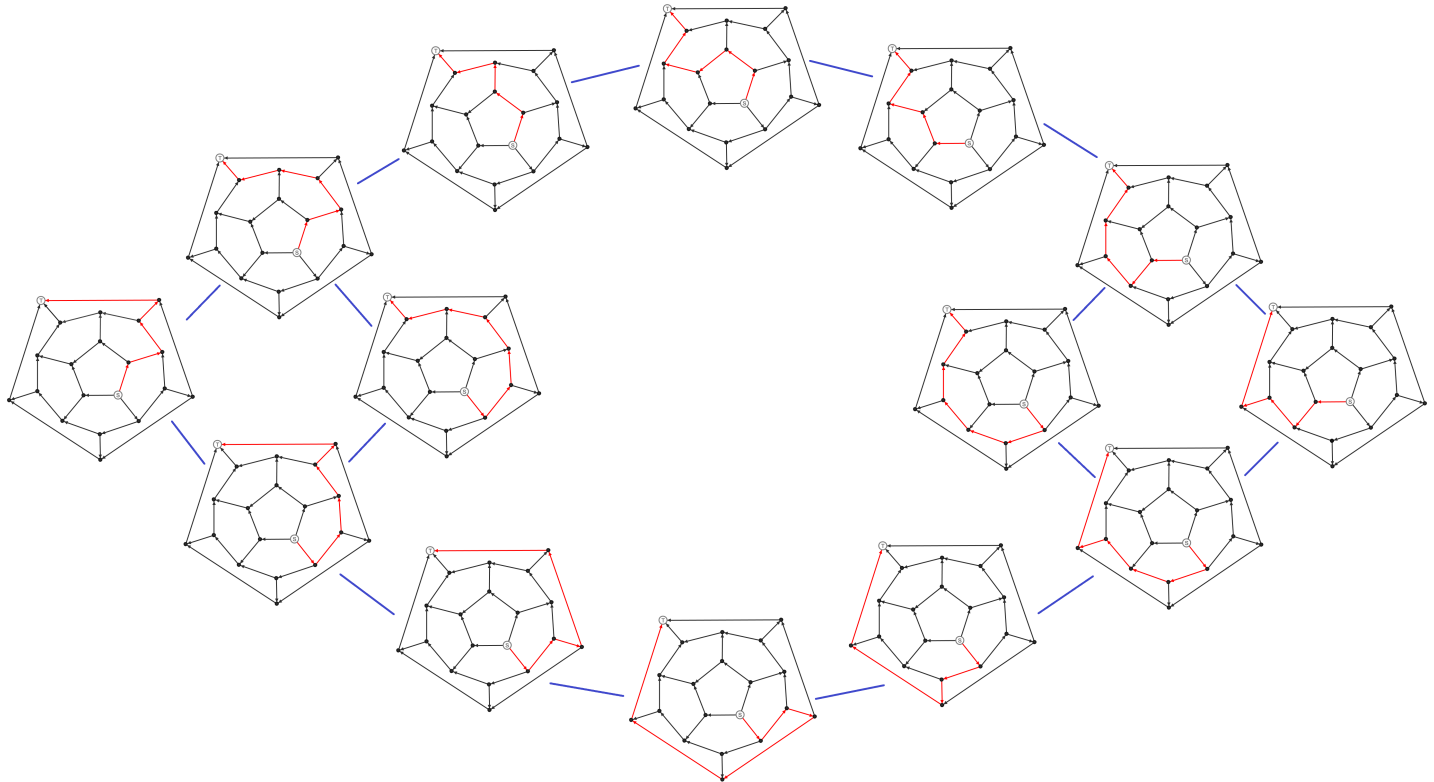
THE FLIP GRAPH OF MONOTONE PATHS

Two f -monotone paths differ by a **polygon flip** across a 2-dimensional face F if they agree on all edges except follow two different paths on F .

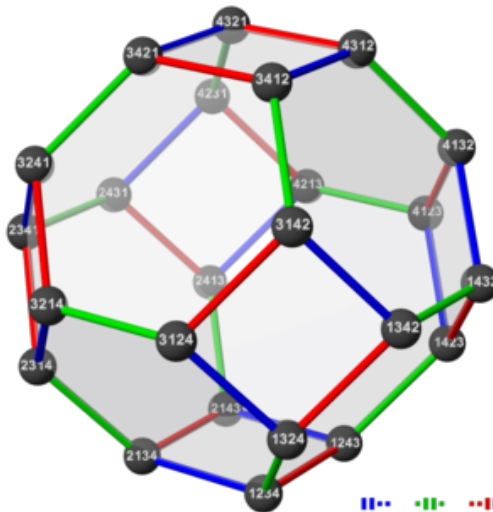
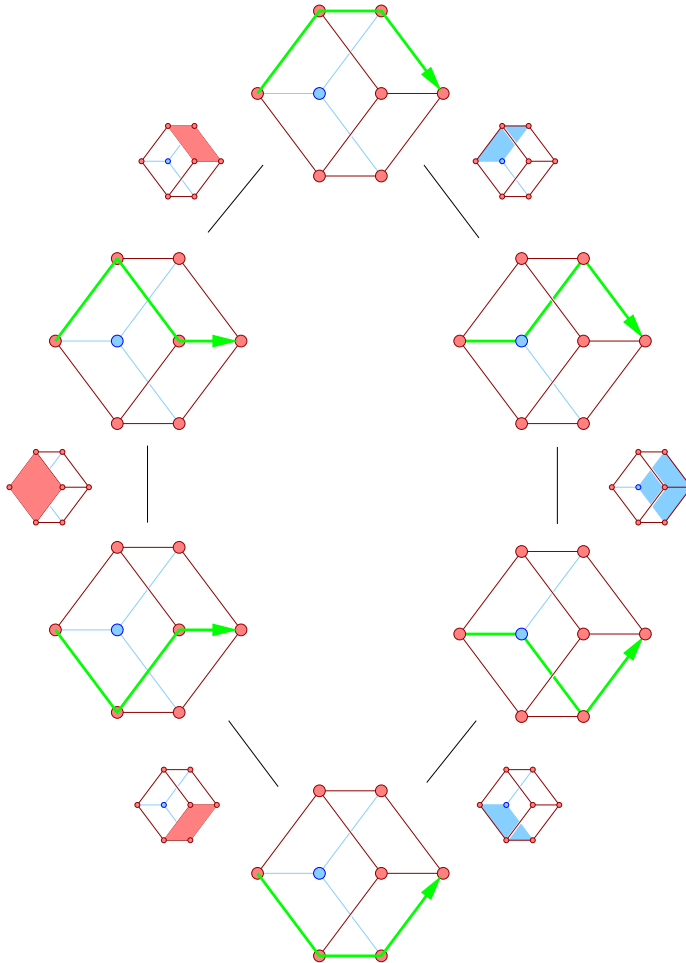


FLIP GRAPH OF MONOTONE PATHS

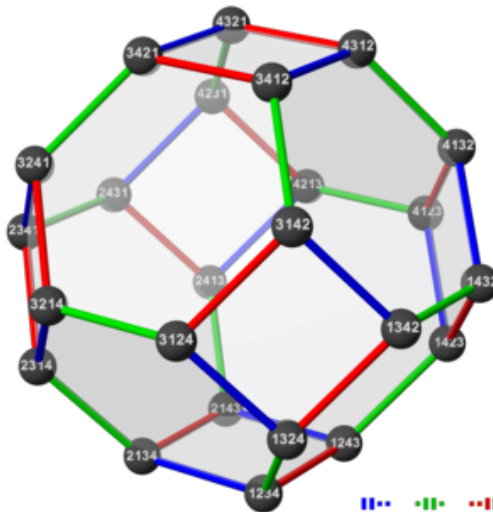
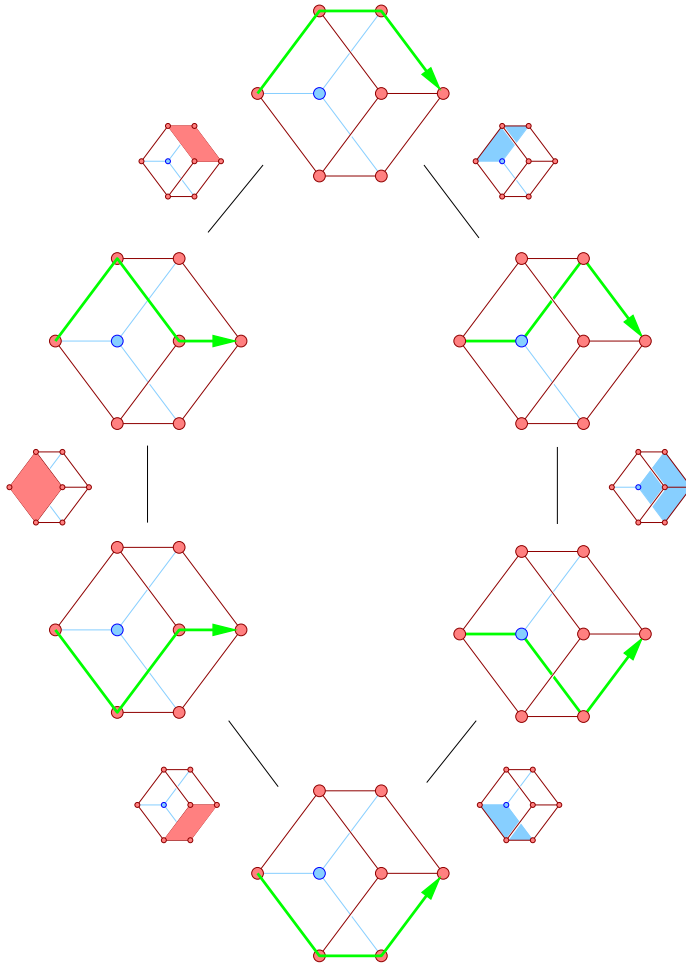
The **flip graph** is the (undirected) graph with nodes all f -monotone paths on P and edges are pairs of monotone paths which differ by a polygon flip.



FLIP GRAPH OF THE CUBE



FLIP GRAPH OF THE CUBE



A CW-COMPLEX OF MONOTONE PATHS (FIBER POLYTOPES!)

- **Theorem** (Billera-Kapranov- Sturmfels 1994) There is a CW complex, built from a linear functional on a d -dimensional convex polytope, whose 1-skeleton is the entire flip graph. It has the homotopy type of the $(d - 2)$ -sphere.
- **Corollary** The polygon flip graph is connected, because CW complex is actually connected
- **Theorem** (Athanasiadis-Edelman-Reiner 2000) Graph of c -monotone paths on a d -polytope P is $(d - 1)$ -connected for simple polytopes, but the graph can be 2-connected for arbitrary d -polytope with $d \geq 3$.

A CW-COMPLEX OF MONOTONE PATHS (FIBER POLYTOPES!)

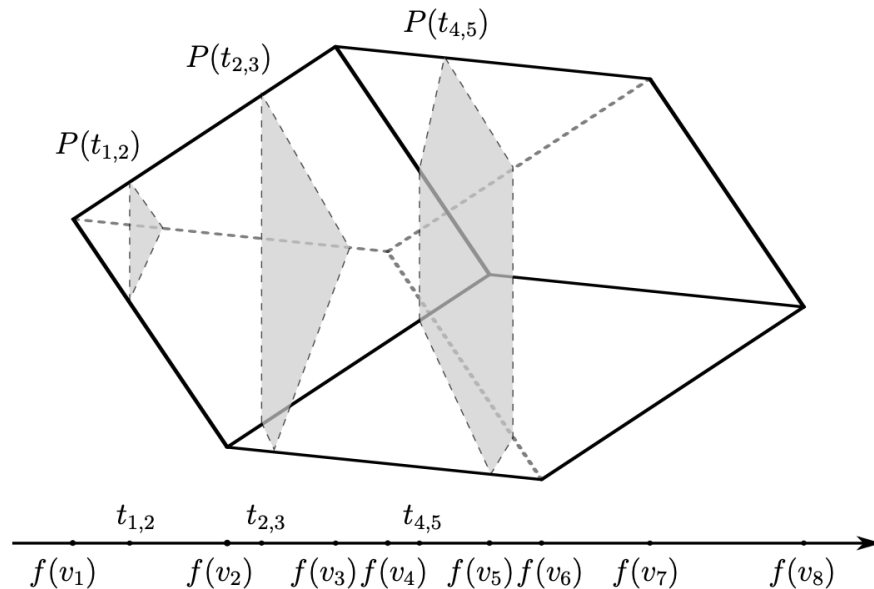
- **Theorem** (Billera-Kapranov- Sturmfels 1994) There is a CW complex, built from a linear functional on a d -dimensional convex polytope, whose 1-skeleton is the entire flip graph. It has the homotopy type of the $(d - 2)$ -sphere.
- **Corollary** The polygon flip graph is connected, because CW complex is actually connected
- **Theorem** (Athanasiadis-Edelman-Reiner 2000) Graph of c -monotone paths on a d -polytope P is $(d - 1)$ -connected for simple polytopes, but the graph can be 2-connected for arbitrary d -polytope with $d \geq 3$.

A CW-COMPLEX OF MONOTONE PATHS (FIBER POLYTOPES!)

- **Theorem** (Billera-Kapranov- Sturmfels 1994) There is a CW complex, built from a linear functional on a d -dimensional convex polytope, whose 1-skeleton is the entire flip graph. It has the homotopy type of the $(d - 2)$ -sphere.
- **Corollary** The polygon flip graph is connected, because CW complex is actually connected
- **Theorem** (Athanasiadis-Edelman-Reiner 2000) Graph of c -monotone paths on a d -polytope P is $(d - 1)$ -connected for simple polytopes, but the graph can be 2-connected for arbitrary d -polytope with $d \geq 3$.

FIBER POLYTOPES

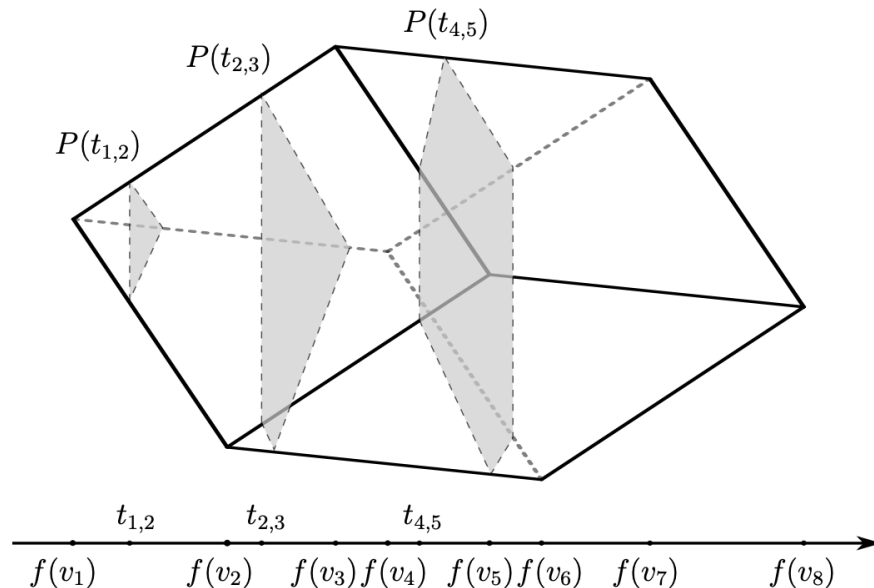
The linear function c yields a linear map of P to a line segment. There are finitely many different **fibers**



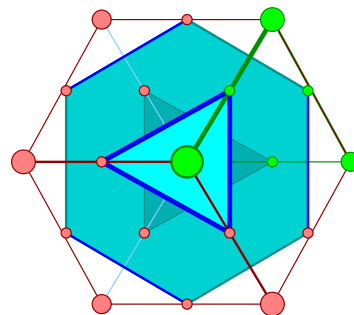
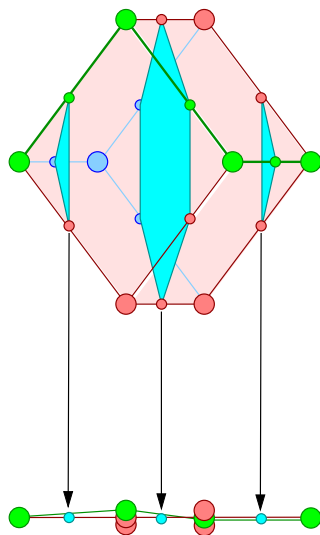
Theorem (Billera-Sturmfels 1992) The Minkowski sum of all the fibers gives rise to a **fiber polytope**, whose vertices are in bijection with the **coherent** monotone paths. The **coherent** Monotone paths are connected by polygon flips. **Monotone Path Polytopes**

FIBER POLYTOPES

The linear function c yields a linear map of P to a line segment. There are finitely many different **fibers**



Theorem (Billera-Sturmfels 1992) The Minkowski sum of all the fibers gives rise to a **fiber polytope**, whose vertices are in bijection with the **coherent** monotone paths. The **coherent** Monotone paths are connected by polygon flips. **Monotone Path Polytopes**



$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

A diagram illustrating the addition of three fractions, each represented by a geometric shape: a small cyan triangle, a medium cyan hexagon, and a large cyan hexagon. Each shape has a green dot with an arrow pointing away from it. The equation shows the sum of these three shapes equals a single large cyan hexagon.

OUR KEY QUESTIONS

QUESTION A

What are the extremal values for **number of monotone paths** for every objective function f on polytopes P with fixed number of vertices and dimension?

QUESTION B

What can be said of the **CW complex of monotone paths** or their **monotone path polytopes**? Can we bound the **diameter of polygon flip graph** for polytopes P with fixed number of vertices and dimension?

QUESTION C

What are the **possible lengths for the monotone paths** on a polytope? E.g., How long can they get? How short? What lengths are possible?

Answering the questions requires understanding the **SPACE OF ALL MONOTONE PATHS**.

OUR KEY QUESTIONS

QUESTION A

What are the extremal values for **number of monotone paths** for every objective function f on polytopes P with fixed number of vertices and dimension?

QUESTION B

What can be said of the **CW complex of monotone paths** or their **monotone path polytopes**? Can we bound the **diameter of polygon flip graph** for polytopes P with fixed number of vertices and dimension?

QUESTION C

What are the **possible lengths for the monotone paths** on a polytope? E.g., How long can they get? How short? What lengths are possible?

Answering the questions requires understanding the **SPACE OF ALL MONOTONE PATHS**.

OUR KEY QUESTIONS

QUESTION A

What are the extremal values for **number of monotone paths** for every objective function f on polytopes P with fixed number of vertices and dimension?

QUESTION B

What can be said of the **CW complex of monotone paths** or their **monotone path polytopes**? Can we bound the **diameter of polygon flip graph** for polytopes P with fixed number of vertices and dimension?

QUESTION C

What are the **possible lengths for the monotone paths** on a polytope? E.g., How long can they get? How short? What lengths are possible?

Answering the questions requires understanding the **SPACE OF ALL MONOTONE PATHS**.

OUR KEY QUESTIONS

QUESTION A

What are the extremal values for **number of monotone paths** for every objective function f on polytopes P with fixed number of vertices and dimension?

QUESTION B

What can be said of the **CW complex of monotone paths** or their **monotone path polytopes**? Can we bound the **diameter of polygon flip graph** for polytopes P with fixed number of vertices and dimension?

QUESTION C

What are the **possible lengths for the monotone paths** on a polytope? E.g., How long can they get? How short? What lengths are possible?

Answering the questions requires understanding the **SPACE OF ALL MONOTONE PATHS**.

HOW MANY
MONOTONE PATHS
OF a POLYTOPE?

and

FLIP DIAMETER?

and MONOTONE PATH
POLYTOPES?

HOW MANY
MONOTONE PATHS
OF a POLYTOPE?
and
FLIP DIAMETER?
and MONOTONE PATH
POLYTOPES?

ANSWER A: EXTREME VALUES FOR NUMBER OF MONOTONE PATHS

THEOREM

Let $\mu(P, f)$ be the number of monotone paths on polytope P with objective function f .

- For all 3-dimensional polytopes P with n vertices,*

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2 \leq \mu(P, f) \leq T_{n-1},$$

where T_n is the Tribonacci numbers defined by the recurrence $T_0 = T_1 = 1$, $T_2 = 2$ and $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$ for $n \geq 3$.

- For all d -dimensional ($d \geq 4$) polytopes P on n vertices,*

$$\left\lceil \frac{dn}{2} \right\rceil + 2 - n \leq \mu(P, f) \leq 2^{n-2}.$$

ANSWER A: EXTREME VALUES FOR NUMBER OF MONOTONE PATHS

THEOREM

Let $\mu(P, f)$ be the number of monotone paths on polytope P with objective function f .

- *For all 3-dimensional polytopes P with n vertices,*

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2 \leq \mu(P, f) \leq T_{n-1},$$

where T_n is the Tribonacci numbers defined by the recurrence $T_0 = T_1 = 1$, $T_2 = 2$ and $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$ for $n \geq 3$.

- *For all d -dimensional ($d \geq 4$) polytopes P on n vertices,*

$$\left\lceil \frac{dn}{2} \right\rceil + 2 - n \leq \mu(P, f) \leq 2^{n-2}.$$

ANSWER A: EXTREME VALUES FOR NUMBER OF MONOTONE PATHS

THEOREM

Let $\mu(P, f)$ be the number of monotone paths on polytope P with objective function f .

- *For all 3-dimensional polytopes P with n vertices,*

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2 \leq \mu(P, f) \leq T_{n-1},$$

where T_n is the Tribonacci numbers defined by the recurrence $T_0 = T_1 = 1$, $T_2 = 2$ and $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$ for $n \geq 3$.

- *For all d -dimensional ($d \geq 4$) polytopes P on n vertices,*

$$\left\lceil \frac{dn}{2} \right\rceil + 2 - n \leq \mu(P, f) \leq 2^{n-2}.$$

SOME THOUGHTS

Let d_k be the outdegree of v_k , Let $\eta_k(P, f)$ be the number of these partial c -monotone paths up to the k -th fiber. $\mu_k(P, f)$ be the number of paths from v_0 to v_k

$\eta_k(P, f) - \eta_{k-1}(P, f) = (d_k - 1)\mu_k(P, f)$ for every $k \in [n - 1]$. Then

$$\mu(P, f) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} (d_k - 1)\mu_k(P, f).$$

From this the lower bound can be derive, in all dimensions holds.

In dimension 3, lower bound is met by prisms, the upper bound is realized by stacked polytope.

For $d \geq 4$, the upper bound can be realized by 2-neighborly polytope since the graph is complete.

SOME THOUGHTS

Let d_k be the outdegree of v_k , Let $\eta_k(P, f)$ be the number of these partial c -monotone paths up to the k -th fiber. $\mu_k(P, f)$ be the number of paths from v_0 to v_k

$\eta_k(P, f) - \eta_{k-1}(P, f) = (d_k - 1)\mu_k(P, f)$ for every $k \in [n - 1]$. Then

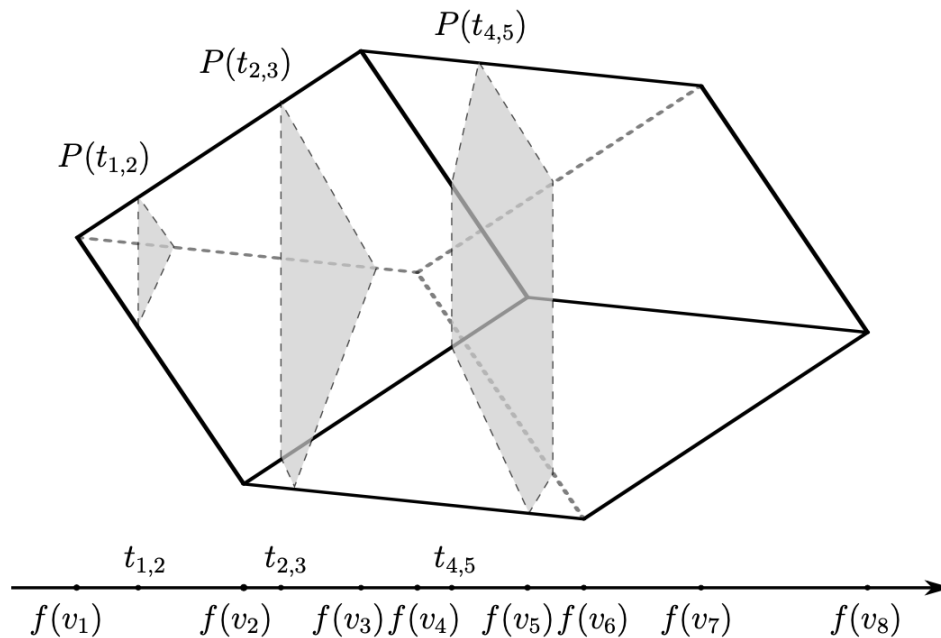
$$\mu(P, f) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} (d_k - 1)\mu_k(P, f).$$

From this the lower bound can be derive, in all dimensions holds.

In dimension 3, lower bound is met by prisms, the upper bound is realized by stacked polytope.

For $d \geq 4$, the upper bound can be realized by 2-neighborly polytope since the graph is complete.

PROOF IDEA OF FIBERS



$$G_{0,1} \xrightarrow{\alpha_1} G_1 \xleftarrow{\beta_1} G_{1,2} \xrightarrow{\alpha_2} G_2 \xleftarrow{\beta_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} G_{n-1} \xleftarrow{\beta_{n-1}} G_{n-1,n}$$

UPPER BOUNDS FOR THE DIAMETER OF FLIP GRAPHS

QUESTION

Can we bound the diameter of flip graphs for polytopes P with fixed number of vertices and dimension?

THEOREM

Let $G(P, f)$ be the flip graph of polytope P on objective function f . For any 3-dimensional polytope P on n vertices.

$$\lceil \frac{(n-2)^2}{4} \rceil \leq \text{diam } G(P, f) \leq (n-2) \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor.$$

UPPER BOUNDS FOR THE DIAMETER OF FLIP GRAPHS

QUESTION

Can we bound the diameter of flip graphs for polytopes P with fixed number of vertices and dimension?

THEOREM

Let $G(P, f)$ be the flip graph of polytope P on objective function f . For any 3-dimensional polytope P on n vertices.

$$\lceil \frac{(n-2)^2}{4} \rceil \leq \text{diam } G(P, f) \leq (n-2) \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor.$$

UPPER BOUNDS FOR THE DIAMETER OF FLIP GRAPHS

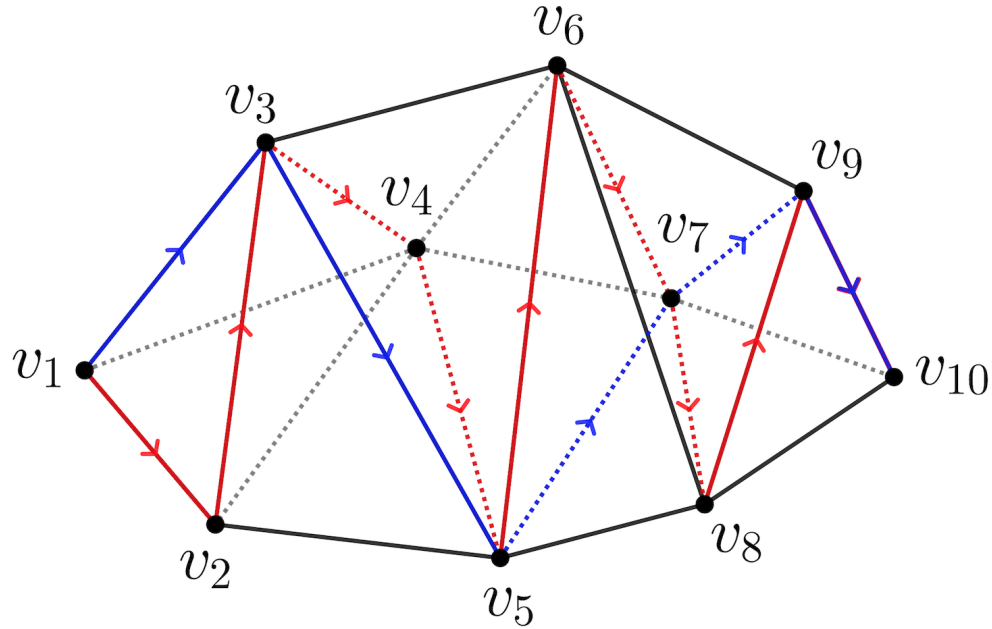
QUESTION

Can we bound the diameter of flip graphs for polytopes P with fixed number of vertices and dimension?

THEOREM

Let $G(P, f)$ be the flip graph of polytope P on objective function f . For any 3-dimensional polytope P on n vertices.

$$\lceil \frac{(n-2)^2}{4} \rceil \leq \text{diam } G(P, f) \leq (n-2) \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor.$$



Two paths of distance 16. The flips are $\{1, 2, 3\}$, $\{7, 9, 10\}$, $\{7, 8, 10\}$, $\{8, 9, 10\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{5, 7, 8\}$, $\{5, 6, 8\}$, $\{6, 8, 9\}$, $\{6, 7, 9\}$, $\{7, 9, 10\}$, $\{7, 8, 10\}$ and $\{8, 9, 10\}$.

LENGTHS OF MONOTONE PATHS OF a POLYTOPE

LET c BE AN OBJECTIVE FUNCTION:

- 1 A **c -monotone path** is a directed path in the LP-oriented graph, that starts from some vertex to the optimal vertex.

Theorem (JDL- S. Kafer- L. Sanità 2020) Finding the shortest c -monotone path to an optimal solution is NP-hard. Furthermore, unless $P=NP$, it is hard to approximate within a factor strictly better than 2.

- 2 The c -monotone diameter is the maximum length of a shortest c -monotone path, the maximum being taken over all starting vertices.
 - 3 The monotone diameter of a polytope is the maximum c -monotone diameter, the maximum being taken over all objective functions c .
 - 4 The c -height is the length of the longest c -monotone path.
 - 5 The height is the maximum c -height over all objective sets c .
- We have found many situations where simplex method MUST traverse a Short monotone path!
- Theorem: Simplex method with several pivot rules efficient in polytopes with $0/1$ vertices

BOUNDING STEEPEST EDGE PIVOT DIAMETER

Let μ and ν be the minimum and maximum l_2 norms of edges.

THEOREM

The number of different BFS generated with Steepest edge pivot rule is bounded by

$$n \left[\frac{m\gamma^2\nu}{\delta^2\mu} \log \left(m\frac{\gamma}{\delta} \right) \right].$$

Let λ and Δ be the minimum and maximum (absolute value) $m \times m$ -subdeterminants of A .

COROLLARY

The number of different BFS generated with Steepest edge pivot rule is bounded by

$$n \left[m\sqrt{2m} \frac{\gamma^3\Delta}{\delta^3\lambda} \log \left(m\frac{\gamma}{\delta} \right) \right].$$

OPEN PROBLEMS!!

QUESTION

What are the bounds on the lengths of monotone paths, i.e., diameter/height, for d -dimensional polytopes with n facets.

QUESTION

What is the maximum number of monotone paths on 3-dimensional simple polytopes on $2n$ vertices? Is it $F_{n+2} + 1$, where F_n is the Fibonacci numbers, achieved by wedges of $(n+1)$ -gon? Now what are the bounds for simple d -polytopes?

QUESTION

What is the exact value of the maximum diameter of flip graph? In particular, is it equal to the lower bound given for every n ? Is it different for simple d -dimensional polytopes?

¡ MUCHAS Gracias!