# Examen Básico de Topología

27 de Julio de 2021

**Instrucciones:** El examen tiene una duración de tres horas. Resolver todos los problemas, escanear y mandar a: **xico@math.cinvestav.mx**. La **hora límite** para recepción es **13:15 hrs.**

1. Identifiquemos al grupo ortogonal especial $SO(n)$ con un subgrupo de $SO(n+1)$ por medio de la inclusión $A \mapsto \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Demostrar que $SO(n+1)/SO(n) \approx S^n$.

2. Probar que $SO(4)$ es homeomorfo a $S^3 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^3$.

   (**Sugerencia:** Considere el mapeo $SO(4) \to S^3 = SO(4)/SO(3)$ y use el hecho de que $S^3$ tiene estructura natural de grupo: es el grupo de los cuaternios unitarios)

   En general no se cumple que $SO(n) \approx S^{n-1} \times SO(n-1)$ para $n > 4$.

3. Demostrar que un CW complejo $X$ es arco-conexo si y solo si su 1-esqueleto $X^1$ es arco-conexo.

4. Para un grupo $\pi$ denotamos por $[\pi, \pi]$ al subgrupo conmutador. Calcular el cociente $\pi/[\pi, \pi]$ para $\pi = \pi_1(S_g)$, donde $S_g = T^2 \# \ldots \# T^2$ es la suma conexa de $g$ toros.

5. Calcular los grupos de homología de la superficie $S_g \# \mathbb{R}\mathrm{P}^2$.

6. Calcular los grupos de homología del 2-esqueleto de un $n$-simplejo. (**Sugerencia:** Usar la característica de Euler).

7. Probar que dos CW-complejos finitos del mismo tipo de homotopía $X$ y $Y$, tienen ambos un número par de celdas o un número impar de celdas.

8. Probar que si $m \neq n$, entonces $D^m \not\approx D^n$.

9. Probar que todo mapeo $f : \mathbb{R}\mathrm{P}^{2n} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{2n}$ tiene un punto fijo. Construir un mapeo $g : \mathbb{R}\mathrm{P}^{2n+1} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{2n+1}$ sin puntos fijos.

10. Probar que no existe un mapeo $f : D^n \to S^{n-1}$ tal que la restricción $f|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ tenga grado $\neq 0$.